

1

〔解答〕

	イ	ロ
(1)	$\frac{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$	$\log 2$
	ハ	
(2)	$2+i, -1$	
	ニ	
(3)	$x = \frac{1}{16}, 16$	
	ホ	
(4)	$x = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$	
	ヘ	
(5)	31.29	
	ト	チ
(6)	$-\frac{1}{6}$	$\frac{\sqrt{210}}{6}$

〔解説〕

(1)(i)

部分積分を用いて、

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^{-x})' \cos x dx \\
 &= \left[-e^{-x} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^{-x}) (\cos x)' dx \\
 &= \left\{ \left(-e^{-\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} \right) - (-e^0 \cos 0) \right\} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x dx \\
 &= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^{-x})' \sin x dx \\
 &= 1 - \left\{ \left[-e^{-x} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^{-x}) (\sin x)' dx \right\} \\
 &= 1 - \left\{ \left(-e^{-\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} \right) - (-e^0 \sin 0) \right\} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx \\
 &= 1 + e^{-\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx
 \end{aligned}$$

と変形できる。よって、

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx &= 1 + e^{-\frac{\pi}{2}} \\
 \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx &= \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

(ii)

与式を変形すると、

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)'}{1 + \cos x} dx \\
 &= - \left[\log(1 + \cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \log 2
 \end{aligned}$$

である。

(2)

a, b は実数であるから、3 次方程式 $x^3 + ax^2 + x + b = 0$ は実数係数多項式の方程式である。ゆえに、この方程式が複素数 $2-i$ を解にもつとき、共役な複素数である $2+i$ も解にもつ。3 次方程式の解は重解を含めると 3 つであるから、実数 k を用いて、

$$\begin{aligned}
 x^3 + ax^2 + x + b &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-2-i)(x-2+i)(x-k) &= 0
 \end{aligned}$$

と変形できる。これを展開すると、

$$x^3 + (-k-4)x^2 + (4k+5)x - 5k = 0$$

となるから、元の方程式 $x^3 + ax^2 + x + b = 0$ と比較して、

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} -k-4=a \\ 4k+5=1 \\ -5k=b \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} k=-1 \\ a=-3 \\ b=5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

となる。ゆえに、求める他の解は、 $2+i, -1$ である。

(3)

真数条件、底の条件より、 $0 < x < 1$ または $1 < x$ である。底を 2 にそろえて式変形を行うと、

$$\begin{aligned}
 \log_2 3 \cdot \log_5 x &= 16 \log_2 2 \cdot \log_x 3 \\
 \Leftrightarrow \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 5} &= 16 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 x} \\
 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 &= 16 \\
 \Leftrightarrow \log_2 x &= -4, 4 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{1}{16}, 16
 \end{aligned}$$

となる。この 2 解は $0 < x < 1$ または $1 < x$ を満たすため、解は $x = \frac{1}{16}, 16$ である。

(4)

 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ であるから、

$$\begin{aligned}
 \sin 2x + 2 \sin x &= \cos x + 1 \\
 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 2 \sin x - \cos x - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(\cos x + 1) &= 0
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 \leq x < \pi$ より、 $-1 < \cos x \leq 1$ であるから、 $\cos x + 1 > 0$ である。よって、

$$\begin{aligned}
 (2 \sin x - 1)(\cos x + 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2 \sin x - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sin x &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x < \pi$ であるから、求める解は、 $x = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$ である。

(5)

 a, b をそれぞれ 10 進法であらわすと、

$$\begin{aligned}
 a &= 2^2 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 + 2^{-2} \cdot 1 \\
 &= 4 + 1 + \frac{1}{4} \\
 &= 5.25
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= 5^2 \cdot 1 + 5^0 \cdot 1 + 5^{-2} \cdot 1 \\
 &= 25 + 1 + \frac{1}{25} \\
 &= 26.04
 \end{aligned}$$

である。ゆえに、

$$\begin{aligned}
 a + b &= 5.25 + 26.04 \\
 &= 31.29
 \end{aligned}$$

である。

(6)

$$\begin{aligned}
 |\vec{t}\vec{b} - \vec{a}|^2 &= (2t-1)^2 + (-t-1)^2 + (-t-2)^2 \\
 &= 6t^2 + 2t + 6 \\
 &= 6 \left(t + \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{35}{6}
 \end{aligned}$$

となり、 $|\vec{t}\vec{b} - \vec{a}|^2$ は $t = -\frac{1}{6}$ で最小値 $\frac{35}{6}$ をとる。 $|\vec{t}\vec{b} - \vec{a}| \geq 0$ であるから、 $|\vec{t}\vec{b} - \vec{a}|$ は、 $t = -\frac{1}{6}$ で最小値 $\sqrt{\frac{35}{6}} = \frac{\sqrt{210}}{6}$ をとる。

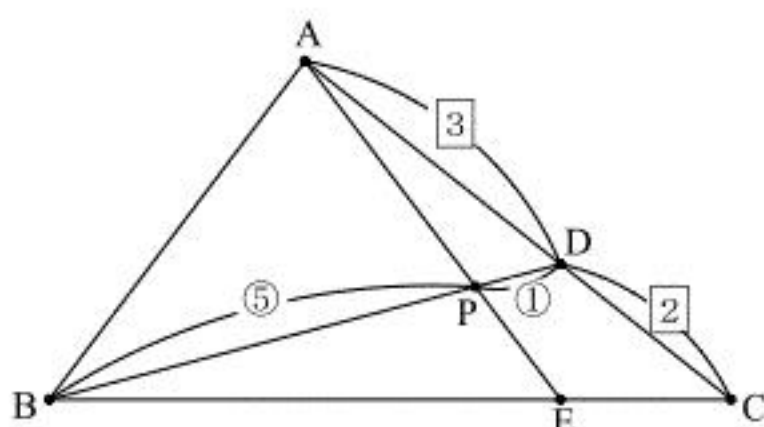
2

〔解答〕

	イ	ロ
(1)	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$
	ハ	ニ
(2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

〔解説〕

(1)



$AD:AC=3:5$ ， $BP:PD=5:1$ であるから，

$$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{6} \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

となる。ゆえに，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= k \overrightarrow{AP} \\ &= \frac{1}{6} k \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} k \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

となる。また， $\overrightarrow{BE} = l \overrightarrow{BC}$ であるから，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} \\ &= \overrightarrow{AB} + l(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= (1-l) \overrightarrow{AB} + l \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は一次独立であるから，

$$\begin{cases} \frac{1}{6}k = 1-l \\ \frac{1}{2}k = l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ l = \frac{3}{4} \end{cases}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} + p \overrightarrow{BP} + q \overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{AP} + p(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + q(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) \\ &= (1+p+q) \overrightarrow{AP} - p \overrightarrow{AB} - q \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} + p \overrightarrow{BP} + q \overrightarrow{CP} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (1+p+q) \overrightarrow{AP} &= p \overrightarrow{AB} + q \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

である。ここで，(1)より $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$ であるから，

$$\begin{aligned} (1+p+q) \overrightarrow{AP} &= p \overrightarrow{AB} + q \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow (1+p+q) \left(\frac{1}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right) &= p \overrightarrow{AB} + q \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \frac{1+p+q}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{1+p+q}{2} \overrightarrow{AC} &= p \overrightarrow{AB} + q \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

となる。ここで， $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は一次独立であるから，

$$\begin{cases} \frac{1+p+q}{6} = p \\ \frac{1+p+q}{2} = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{2} \\ q = \frac{3}{2} \end{cases}$$

である。

〔解答〕

(1)	イ
	$\frac{7}{216}$
(2)	ロ
	$\frac{209}{216}$
(3)	ハ
	$\frac{49}{1296}$
(4)	ニ
	$\frac{5}{108}$
(5)	ホ
	$\frac{1}{49}$

〔解説〕

(1)

a の値で場合分けして考える。なお、 a は ${}_6C_1 = 6$ (通り) の値をとり、これらは同様に確からしい。

[1] $a = 1$ のとき

B を 1 回投げるから、 $b = 2$ となる確率は、B を投げて出た目が 2 である確率となる。B を 1 回投げて出る目の順列は $6^1 = 6$ (通り) であり、これらは同様に確からしいから、 $b = 2$ となる確率は $\frac{1}{6}$ である。

[2] $a = 2$ のとき

B を 2 回投げるから、 $b = 2$ となる確率は、B を投げて出た目が 2 回とも 1 である確率となる。B を 2 回投げて出る目の順列は $6^2 = 36$ (通り) であり、これらは同様に確からしいから、 $b = 2$ となる確率は $\frac{{}_2C_2}{36} = \frac{1}{36}$ である。

[3] $a \geq 3$ のとき

B を 3 回以上投げるとき、出た目の和は 3 以上となるため不適である。

以上 [1], [2], [3] より、 $b = 2$ となる確率は、

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{7}{216}$$

である。

(2)

b が最大値をとるのは、 $a = 6$ かつ B を投げて出た目がすべて 6 であるときであり、このとき $b = 36$ である。よって、 $b = 1$ または $3 \leq b \leq 36$ となる事象は、 $b = 2$ となる事象の余事象であるから、求める確率は (1) より、

$$1 - \frac{7}{216} = \frac{209}{216}$$

である。

(3)

(1) と同様に考える。

[1] $a = 1$ のとき

B を 1 回投げるから、 $b = 3$ となる確率は、B を投げて出た目が 3 である確率となる。B を 1 回投げて出る目の順列は $6^1 = 6$ (通り) であり、これらは同様に確からしいから、 $b = 3$ となる確率は $\frac{1}{6}$ である。

[2] $a = 2$ のとき

B を 2 回投げるから、 $b = 3$ となる確率は、B を投げて出た目が 1 と 2 である確率となる。B を 2 回投げて出る目の順列は $6^2 = 36$ (通り) であり、これらは同様に確からしいから、 $b = 3$ となる確率は $\frac{{}_2C_1}{36} = \frac{1}{18}$ である。

[3] $a = 3$ のとき

B を 3 回投げるから、 $b = 3$ となる確率は、B を投げて出た目がすべて 1 である確率となる。B を 3 回投げて出る目の順列は $6^3 = 216$ (通り) であり、これらは同様に確からしいから、 $b = 3$ となる確率は $\frac{{}_3C_3}{216} = \frac{1}{216}$ である。

[4] $a \geq 4$ のとき

B を 4 回以上投げるとき、出た目の和は 4 以上となるため不適である。

以上 [1], [2], [3], [4] より、 $b = 3$ となる確率は、

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{216} = \frac{49}{1296}$$

である。

(4)

$a = 3$ であるから、 $b = 6$ となるのは、B を投げて出た目の組み合わせが $\{1, 1, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 2, 2\}$ となるときである。ここで、B を 3 回投げて出る目の順列は $6^3 = 216$ (通り) であり、これらは同様に確からしいから、求める確率は、

$$\frac{{}_3C_2 + {}_3C_1 \cdot {}_2C_1 + {}_3C_3}{216} = \frac{5}{108}$$

である。

(5)

$a = 3$ かつ $b = 3$ である確率は、(3) の [3] より、

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{216} = \frac{1}{1296}$$

である。求める確率は、 $b = 3$ であったときに $a = 3$ である条件付き確率であるから、(3) より、

$$\frac{\frac{1}{1296}}{\frac{49}{1296}} = \frac{1}{49}$$

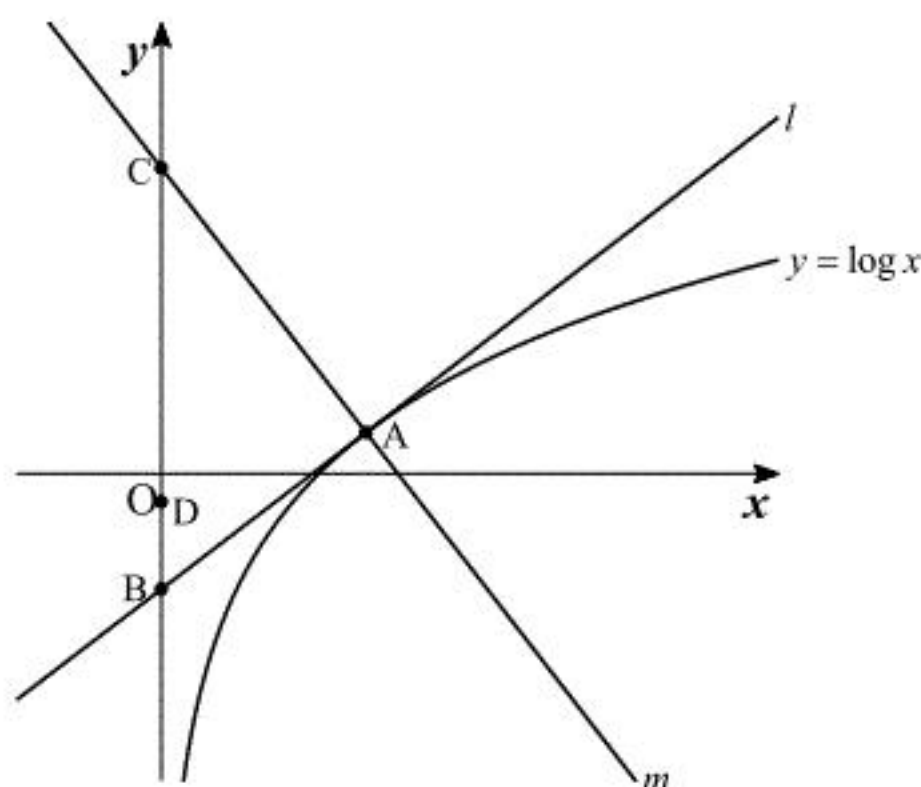
である。

〔解答〕

(1)	$\boxed{\text{イ}}$	$\boxed{\text{ロ}}$
	$\log t - 1$	$\log t + t^2$
(2)	$\boxed{\text{ハ}}$	$\boxed{\text{ニ}}$
	$t^2 - t\sqrt{t^2 + 1} + 1$	$\frac{1}{2}$

〔解説〕

(1)



$(\log x)' = \frac{1}{x}$ であるから、 l の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{t}(x-t) + \log t \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{t}x + \log t - 1 \end{aligned}$$

となる。点 B の y 座標は、この方程式に $x=0$ を代入したときの y の値であるから、 $\log t - 1$ である。また、 m の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{-1}{\frac{1}{t}}(x-t) + \log t \\ \Leftrightarrow y &= -tx + \log t + t^2 \end{aligned}$$

となる。点 C の y 座標は、この方程式に $x=0$ を代入したときの y の値であるから、 $\log t + t^2$ である。

(2)

点 D の座標を $(0, d)$ とおく。点 D は線分 BC 上の点であるから、 $\log t - 1 \leq d \leq \log t + t^2$ である。
 $CA = CD$ であるとき、 $CA^2 = CD^2$ であるから、

$$\begin{aligned} CA^2 &= CD^2 \\ \Leftrightarrow (0-t)^2 + (\log t + t^2 - \log t)^2 &= (\log t + t^2 - d)^2 \\ \Leftrightarrow \log t + t^2 - d &= \pm\sqrt{t^4 + t^2} \quad (\because t^4 + t^2 \geq 0) \\ \Leftrightarrow d &= \log t + t^2 \pm t\sqrt{t^2 + 1} \end{aligned}$$

である。 $\log t - 1 \leq d \leq \log t + t^2$ であるから、 $d = \log t + t^2 - t\sqrt{t^2 + 1}$ であり、

$$\begin{aligned} BD &= d - (\log t - 1) \\ &= t^2 - t\sqrt{t^2 + 1} + 1 \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} BD &= \lim_{t \rightarrow \infty} (t^2 - t\sqrt{t^2 + 1} + 1) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{t^2 + 1} (\sqrt{t^2 + 1} - t) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{\sqrt{t^2 + 1} + t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} + 1} \\ &= \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(1)

与えられた関係式に代入して計算すると、

$$a_2 = \frac{a_1}{a_1 + 1} = \frac{a}{a + 1}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{a_2 + 1} = \frac{\frac{a}{a+1}}{\frac{a}{a+1} + 1} = \frac{a}{2a+1}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{a_3 + 1} = \frac{\frac{a}{2a+1}}{\frac{a}{2a+1} + 1} = \frac{a}{3a+1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_2 = \frac{a}{a+1}, a_3 = \frac{a}{2a+1}, a_4 = \frac{a}{3a+1}$$

(2)

(1)より、一般項 a_n は、

$$a_n = \frac{a}{(n-1)a+1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

であると推測される。①が任意の自然数 n で成立することを、数学的帰納法によって示す。

[1] $n=1$ のとき

①に代入すると、 $a_1 = a$ が得られるため、 $n=1$ において①が成立している。

[2] $n=k$ において①が成立すると仮定すると

$a_k = \frac{a}{(k-1)a+1}$ が成立する。ここで、 $n=k+1$ の場合を考えると、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k}{a_k + 1} \\ &= \frac{\frac{a}{(k-1)a+1}}{\frac{a}{(k-1)a+1} + 1} \\ &= \frac{a}{ka+1} \end{aligned}$$

である。よって、①は $n=k+1$ の場合も成立している。

以上[1],[2]より、①はすべての自然数 n で成立する。

(証明終)