

I

【解答】

(1)	イ	ロ	ハ
	$\log 2 - \frac{1}{2}$	$\pi^2 - 4$	$\frac{71}{3}$
(2)	ニ		
	$(1 + \log 2x)(2x)^x$		
(3)	ホ		
	$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$		
(4)	ヘ		
	$\frac{1}{4}, 2\sqrt{2}$		
(5)	ト		
	2002000		

【解説】

(1)(i)

$t = x^2 - 1$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 2x$ である。また以下のように対応する。

x	$\sqrt{2}$	$\rightarrow$	$\sqrt{3}$
t	1	$\rightarrow$	2

置換積分を用いて、

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x \log(x^2 - 1) dx &= \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \log t \cdot 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \log t dt \\ &= \frac{1}{2} [t \log t - t]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} (2 \log 2 - 2 + 1) \\ &= \log 2 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(ii)

部分積分を繰り返し適用することて、

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2 \sin x dx &= \int_0^\pi x^2 (-\cos x)' dx \\ &= [-x^2 \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi 2x \cos x dx \\ &= \pi^2 + 2 \int_0^\pi x (\sin x)' dx \\ &= \pi^2 + 2 [x \sin x]_0^\pi - 2 \int_0^\pi \sin x dx \\ &= \pi^2 + 2 [\cos x]_0^\pi \\ &= \pi^2 - 4\end{aligned}$$

となる。

(iii)

$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$ は、 $-3 < x < 2$ のとき負、 $2 < x < 3$ のとき正であるので、

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3 |x^2 + x - 6| dx &= -\int_{-3}^2 (x - 2)(x + 3) dx + \int_2^3 (x^2 + x - 6) dx \\ &= \frac{1}{6} \{3 - (-2)\}^3 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\right]_2^3 \\ &= \frac{125}{6} + \frac{3^3 - 2^3}{3} + \frac{3^2 - 2^2}{2} - 6(3 - 2) \\ &= \frac{125}{6} + \frac{19}{3} + \frac{5}{2} - 6 \\ &= \frac{71}{3}\end{aligned}$$

となる。

(2)

対数微分法を用いる。 $y = (2x)^x$ において両辺の対数をとると、

$$\begin{aligned}\log y &= \log \{(2x)^x\} \\ \Leftrightarrow \log y &= x \log 2x\end{aligned}$$

となり、この両辺を微分して整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= 1 \cdot \log 2x + x \cdot 2 \cdot \frac{1}{2x} \\ \Leftrightarrow \frac{y'}{y} &= \log 2x + 1 \\ \Leftrightarrow y' &= (\log 2x + 1)y \\ \therefore y' &= (\log 2x + 1)(2x)^x\end{aligned}$$

となる。

(3)

$z^2 = i$ において両辺絶対値をとると、

$$\begin{aligned}|z|^2 &= 1 \\ \therefore |z| &= 1\end{aligned}$$

となるから、 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とおくことができる。このとき、

$$\begin{aligned}z^2 &= i \\ \Leftrightarrow (\cos \theta + i \sin \theta)^2 &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \cos 2\theta + i \sin 2\theta &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

と書き表せる。よって n を整数として、

$$\begin{aligned}2\theta &= \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ \theta &= \frac{\pi}{4} + n\pi\end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$ となる。したがって、

$$\begin{aligned}z &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}, \cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi \\ \therefore z &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\end{aligned}$$

となる。

(4)

真数条件から $x > 0$ であり、また底の条件より $x \neq 1$ である。 $t = \log_2 x$ とおくと、 $t \neq 0$ なる実数

を動く。このとき $\log_x 8 = 3 \log_x 2 = \frac{3}{\log_2 x} = \frac{3}{t}$ であるから、

$$\begin{aligned}\log_x 8 - \log_2 x &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{t} - t &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 3 - t^2 &= \frac{1}{2}t \quad (\because t \neq 0) \\ \Leftrightarrow 2t^2 + t - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2t - 3)(t + 2) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{3}{2}, -2\end{aligned}$$

となる。 $x = 2^t$ であるから、解は $x = 2^{\frac{3}{2}}, 2^{-2}$ 、つまり、 $x = 2\sqrt{2}, \frac{1}{4}$ である。

(5)

二項定理より、 $(2 + x)^{1001} = \sum_{n=0}^{1001} {}^{1001}C_n 2^{1001-n} x^n$ であるから、 x^{999} の係数は、

$$\begin{aligned}{}^{1001}C_{999} \cdot 2^{1001-999} &= {}^{1001}C_2 \cdot 2^2 \\ &= \frac{1001 \cdot 1000}{2 \cdot 1} \cdot 4 \\ &= 2002000\end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

(1)	イ
	$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$
(2)	ロ
	$\frac{2}{3}$
(3)	ハ
	$\frac{2}{9}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

〔解説〕

(1)

点 G は $\triangle ABC$ の重心だから、 $\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ となる。

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OG} &= \vec{a} \cdot \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c})\end{aligned}$$

と表すことができる。四面体 OABC が、1 辺の長さが 1 の正四面体であるとき、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 1 \text{ となるから,}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

となる。

(3)

$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\vec{b}$ である。点 F は直線 OG 上にあるので、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= k\overrightarrow{OG} \\ &= \frac{k}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \\ &= \frac{k}{3} \left(2 \cdot \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{c} \right) \\ &= \frac{2}{3}k\overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}k\overrightarrow{OE} + \frac{1}{3}k\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

となる。点 F は平面 CDE 上にあるから、各係数の和が 1 となり、

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}k + \frac{1}{2}k + \frac{1}{3}k &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{4+3+2}{6}k &= 1 \\ \therefore k &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

と計算され、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= \frac{k}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \\ &= \frac{2}{9}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

(1)	$\boxed{\text{イ}}$	$\boxed{\text{ロ}}$
	3	$3b_n + 3$
(2)	$\boxed{\text{ハ}}$	
	$\frac{3}{2}(3^n - 1)$	
(3)	$\boxed{\text{ニ}}$	
	$3^n + 2n - 1$	

〔解説〕

(1)

$b_1 = S_1 - 1^2 = a_1 - 1 = 3$ である。また

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} - b_n &= S_{n+1} - (n+1)^2 - (S_n - n^2) \\
 &= (S_{n+1} - S_n) - 2n - 1 \\
 &= a_{n+1} - 2n - 1 \\
 &= 2(S_n - n^2 + n + 2) - 2n - 1 \\
 &= 2(b_n + n + 2) - 2n - 1 \\
 &= 2b_n + 3
 \end{aligned}$$

であるから、 $b_{n+1} = 3b_n + 3$ となる。

(2)

$b_{n+1} = 3b_n + 3 \Leftrightarrow b_{n+1} + \frac{3}{2} = 3\left(b_n + \frac{3}{2}\right)$ であり、 $b_1 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ なので、数列 $\left\{b_n + \frac{3}{2}\right\}$ は初項 $\frac{9}{2}$ 、公比 3

の等比数列である。よって、

$$\begin{aligned}
 b_n + \frac{3}{2} &= \frac{9}{2} \cdot 3^{n-1} \\
 \therefore b_n &= \frac{3}{2}(3^n - 1)
 \end{aligned}$$

となる。

(3)

$S_n = b_n + n^2 = \frac{3}{2}(3^n - 1) + n^2$ であるから、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}
 a_n &= 2\{S_{n-1} - (n-1)^2 + (n-1) + 2\} \\
 &= 2\left\{\frac{3}{2}(3^{n-1} - 1) + (n-1)^2 - (n-1)^2 + (n-1) + 2\right\} \\
 &= 3^n + 2n - 1
 \end{aligned}$$

となり、これは $a_1 = 4$ も含めることができる。

〔解答〕

(1)	イ
	$\frac{1}{324}$
(2)	ロ
	$\frac{35}{1296}$
(3)	ハ
	$\frac{65}{81}$
(4)	ニ
	$\frac{101}{216}$

〔解説〕

(1)

それぞれのサイコロについて、出る目はどの目も同様に確からしいとする。目の和が5になるのは、3つ1が出て、1つだけ2が出るときであるので、 $\frac{{}_4C_1}{6^4} = \frac{1}{324}$ である。

(2)

目の和が8になるのは、サイコロの区別を無視して(1, 1, 1, 5), (1, 1, 2, 4), (1, 1, 3, 3), (1, 2, 2, 3),

(2, 2, 2, 2)が出るときである。よって $\frac{{}_4C_1 + \frac{4!}{2!1!1!} + {}_4C_2 + \frac{4!}{1!2!1!} + 1}{6^4} = \frac{35}{1296}$ である。

(3)

出た目の積が3の倍数であるのは、3の倍数が少なくとも1つ出るときである。3の倍数が1つも出ない確率は、 $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$ であるから、求める確率は $1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$ である。

(4)

出た目の積が10の倍数であるのは、出た目の積が偶数かつ5の倍数であるときである。ここで、出た目の積が偶数という事象をX、出た目の積が5の倍数であるという事象をYとする。事象Aの確率を $P(A)$ とかくことにすると、求める確率は $P(X \cap Y)$ である。ここで

$$\begin{aligned} P(X \cap Y) &= 1 - P(\overline{X \cap Y}) \\ &= 1 - P(\overline{X} \cup \overline{Y}) \\ &= 1 - P(\overline{X}) - P(\overline{Y}) + P(\overline{X} \cap \overline{Y}) \end{aligned}$$

である。事象 $\overline{X}$ は出た目の積が偶数でない、つまり1つも偶数がでない事象、事象 $\overline{Y}$ は出た目の積が5の倍数でない、つまり1つも5の倍数がでない事象、事象 $\overline{X} \cap \overline{Y}$ は出た目の積が偶数でも5の倍数でもない、つまり1つも偶数、5の倍数がでない事象である。よって(3)と同様に考えて、求める確率は

$$1 - \left(\frac{3}{6}\right)^4 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \left(\frac{2}{6}\right)^4 = \frac{1296 - 81 - 625 + 16}{1296} = \frac{101}{216}$$

である。

(1)

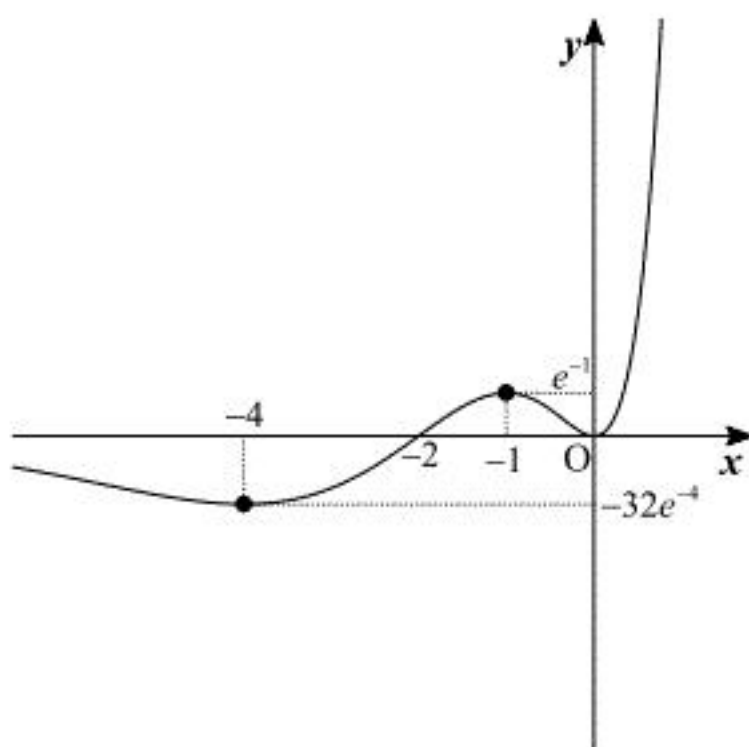
$f(x) = x^2(x+2)e^x$ であるから、 C は $x = -2, 0$ で x 軸と共有点をもつ。また導関数を求めると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 + 4x)e^x + (x^3 + 2x^2)e^x \\ &= (x^3 + 5x^2 + 4x)e^x \\ &= x(x+1)(x+4)e^x \end{aligned}$$

となる。よって増減表を書くと次のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$-32e^{-4}$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0	$\nearrow$	(∞)

したがって図示すると以下のようになる。



(答) 上図

(2)

$F(x) = (x^3 + ax^2 + bx + c)e^x$ を $F'(x) = (x^3 + 2x^2)e^x$ に代入して、

$$\begin{aligned} F'(x) &= (x^3 + 2x^2)e^x \\ \Leftrightarrow (3x^2 + 2ax + b)e^x + (x^3 + ax^2 + bx + c)e^x &= (x^3 + 2x^2)e^x \\ \Leftrightarrow \{x^3 + (3+a)x^2 + (2a+b)x + b+c\}e^x &= (x^3 + 2x^2)e^x \\ \Leftrightarrow (3+a)x^2 + (2a+b)x + b+c &= 2x^2 \end{aligned}$$

となる。これは x についての恒等式であるから、

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+a=2 \\ 2a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \\ \therefore a=-1, b=2, c=-2 \end{aligned}$$

となる。よって $F(x) = (x^3 - x^2 + 2x - 2)e^x$ となる。

(答) $F(x) = (x^3 - x^2 + 2x - 2)e^x$

(3)

(1)の図より、 $S = \int_{-2}^0 f(x)dx$ である。よって、(2)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 f(x)dx \\ &= \int_{-2}^0 F'(x)dx \\ &= [F(x)]_{-2}^0 \\ &= [(x^3 - x^2 + 2x - 2)e^x]_{-2}^0 \\ &= -2 - (-8 - 4 - 4 - 2)e^{-2} \\ &= \frac{18}{e^2} - 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{18}{e^2} - 2$

$$a_n = \frac{\sin\left(n\theta - \frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}} \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

が成立することを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\frac{\sin\left(1\cdot\theta - \frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} = a_1 \text{ より } \textcircled{1} \text{ は成立している。}$$

[2] $n=k$ のとき成立していると仮定して、 $n=k+1$ のときに成立していることを示す。

$a_{k+1} = a_k + \cos k\theta$ および帰納法の仮定より、積和の公式を用いて、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + \cos k\theta \\ &= \frac{\sin\left(k\theta - \frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}} + \cos k\theta \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} \left\{ \sin\left(k\theta - \frac{\theta}{2}\right) + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos k\theta \right\} \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} \left\{ \sin\left(k\theta - \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2} + k\theta\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2} - k\theta\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} \left[\sin\left(k\theta - \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left\{(k+1)\theta - \frac{\theta}{2}\right\} - \sin\left(k\theta - \frac{\theta}{2}\right) \right] \\ &= \frac{\sin\left\{(k+1)\theta - \frac{\theta}{2}\right\}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

と変形される。したがって $n=k+1$ のとき $\textcircled{1}$ は成立する。

[1], [2] より、数学的帰納法から、 $a_n = \frac{\sin\left(n\theta - \frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ が示された。