

平成 30 年度 入学試験問題

数 学

【注意事項】

- 1 係員の指示があるまで、問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は 12 ページ、解答用紙は 4 枚あります。
- 3 落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所などがあつたときは、手を挙げて係員に申し出ること。
- 4 各解答用紙(4 枚)の受験番号欄に受験番号を数字で記入すること。
- 5 解答は必ず各問題別の解答用紙の所定の欄に記入すること。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してかまいませんが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了時刻まで退室してはいけません。
- 8 解答用紙は持ち帰ってはいけません。その他は持ち帰ること。

1

以下の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位である。

(1) 次の積分を求めよ。

(i) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x \log(x^2 - 1) dx =$ イ

(ii) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx =$ □

(iii) $\int_{-3}^3 |x^2 + x - 6| dx =$ ハ

(2) 関数 $y = (2x)^x$ を微分せよ。 $y' =$ 二(3) 方程式 $z^2 = i$ をみたす複素数 z をすべて求めよ。 ホ(4) 方程式 $\log_x 8 - \log_2 x = \frac{1}{2}$ の解を求めよ。 ヘ(5) $(2+x)^{1001}$ を展開したときの x^{999} の係数を求めよ。 ト

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

- 2 四面体 OABC を考え、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。このとき、以下の空欄をうめよ。

(1) $\triangle ABC$ の重心を G とするとき、 $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表すと $\overrightarrow{OG} =$ イ である。

(2) 四面体 OABC が正四面体であり、1 辺の長さが 1 であるとき、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OG} =$ ロ である。

(3) 辺 OA の中点を D、辺 OB を 2 : 1 に内分する点を E とする。3 点 D, E, C を含む平面と線分 OG との交点を F とする。このとき、 $\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表すと $\overrightarrow{OF} =$ ハ である。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

3 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 2(S_n - n^2 + n + 2) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

がなりたつとき、以下の空欄をうめよ。

(1) $b_n = S_n - n^2$ とおくとき、 $b_1 =$ であり、 b_{n+1} を b_n の式で表すと、 $b_{n+1} =$ である。

(2) b_n を n の式で表すと、 $b_n =$ である。

(3) a_n を n の式で表すと、 $a_n =$ である。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

4

4個のサイコロを同時に投げるときに出る目について、以下の問いに答えよ。

(1) 目の和が5である確率を求めよ。

(2) 目の和が8である確率を求めよ。

(3) 目の積が3の倍数である確率を求めよ。

(4) 目の積が10の倍数である確率を求めよ。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

5 関数 $f(x) = (x^3 + 2x^2)e^x$ を考える。 $y = f(x)$ のグラフを C とする。このとき、以下の問いに答えよ。(結論に至る過程も記述すること。)

- (1) $f(x)$ の増減、極値を調べて、 C を座標平面上に描け。 C の凹凸、変曲点は調べなくてよい。また、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ であることは証明なしで用いてよい。
- (2) a, b, c を実数の定数とする。 $F(x) = (x^3 + ax^2 + bx + c)e^x$ が $F'(x) = f(x)$ をみたすとき、 $F(x)$ を求めよ。
- (3) C と x 軸との 2 つの共有点を P, Q とするとき、線分 PQ と C で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

6 θ を $0 < \theta < 2\pi$ をみたす定数とする。次で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = a_n + \cos n\theta \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、自然数 n に対して

$$a_n = \frac{\sin\left(n\theta - \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$$

がなりたつことを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

