

1

【解答】

☐ イ	$\frac{2}{3}(e-1)^{\frac{3}{2}}$
☐ ロ	$e-2$
☐ ハ	$\log 2$
☐ ニ	$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$
☐ ホ	$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$
☐ ヘ	$-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$
☐ ト	$\{5, 6, 7, 8\}$
☐ チ	$-1+2\sqrt{6} < k \leq \frac{48}{7}$

【解説】

(1)(i)

$\sqrt{e^x-1}=t$ と変数変換をすると、積分範囲 $0 \leq x \leq 1$ において、 $e^x-1 \geq 0$ であるから、

$\sqrt{e^x-1}=t \Leftrightarrow e^x-1=t^2$ であり、 $e^x dx = 2t dt$ である。また、各変数の対応は以下の通りになる。

x	0	$\rightarrow$	1
t	0	$\rightarrow$	$\sqrt{e-1}$

したがって、

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x \sqrt{e^x-1} dx &= \int_0^1 (\sqrt{e^x-1}) e^x dx \\ &= \int_0^{\sqrt{e-1}} t \cdot 2t dt \\ &= \int_0^{\sqrt{e-1}} 2t^2 dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^3 \right]_0^{\sqrt{e-1}} \\ &= \frac{2}{3} (e-1)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。

(ii)

部分積分を用いると、

$$\begin{aligned} \int_1^e (\log x)^2 dx &= \left[x (\log x)^2 \right]_1^e - \int_1^e 2 \log x dx \\ &= \left[x (\log x)^2 \right]_1^e - 2 \left[x \log x \right]_1^e + 2 \int_1^e dx \\ &= \left[x (\log x)^2 - 2x \log x + 2x \right]_1^e \\ &= e-2 \end{aligned}$$

となる。

(2)

与式を変形すると、区分求積法より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left[\log |1+x| \right]_0^1 \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

となる。

(3)

与えられた漸化式を変形すると、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+1) \Leftrightarrow a_{n+1}-1 = \frac{1}{2}(a_n-1)$$

となり、数列 $\{a_n-1\}$ が初項 $a_1-1=1$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列になることが分かる。したがって、

$$a_n-1 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となるから、 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$ を得る。

(4)

$-1+\sqrt{3}i$ は絶対値が 2 、偏角が $\frac{2}{3}\pi$ の複素数であるから、 $-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right)$ とか

ける。したがって、 z の絶対値は $\sqrt{2}$ 、偏角は $\frac{1}{3}\pi$ または $\frac{4}{3}\pi$ であるから、

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}\left(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi\right), \sqrt{2}\left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right) \\ \Leftrightarrow z &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i \end{aligned}$$

となる。

(5)

まず、 A について

$$-8 \leq 5x+3 < 28$$

$$\Leftrightarrow -\frac{11}{5} \leq x < 5$$

であるから、 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ である。また、 B について

$$|3x-11| \leq 14$$

$$\Leftrightarrow -14 \leq 3x-11 \leq 14$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{25}{3}$$

であるから、 $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ である。したがって、 $\overline{A} \cap B = \{5, 6, 7, 8\}$ となる。

(6)

直線 $y=x+2$ と放物線 $y=x^2-kx+8$ が $0 \leq x \leq 7$ の範囲で共有点を 2 つ持つ条件は、

$$x^2-kx+8=x+2$$

$$\Leftrightarrow x^2-(k+1)x+6=0$$

より、上の x に関する 2 次方程式が $0 \leq x \leq 7$ の範囲で相異なる実数解を 2 つ持つ条件と同値である。したがって、上の 2 次方程式の判別式を D とおき、 $f(x) = x^2-(k+1)x+6$ とおくと、

求めるべき定数 k の範囲は以下の不等式の条件と同値である。

$$\begin{cases} D > 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 0 < \frac{k+1}{2} < 7 \text{ (軸が } 0 < x < 7 \text{ の範囲内)} & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ f(0) \geq 0, f(7) \geq 0 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

①について、

$$D > 0$$

$$\Leftrightarrow (k+1)^2 - 4 \cdot 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 2k - 23 > 0$$

$$\Leftrightarrow k > -1+2\sqrt{6}, k < -1-2\sqrt{6}$$

である。また、②について、

$$0 < \frac{k+1}{2} < 7 \Leftrightarrow -1 < k < 13$$

である。さらに、③について、

$$f(0) \geq 0 \Leftrightarrow 6 \geq 0 \text{ (常に成り立つ)}$$

$$f(7) \geq 0 \Leftrightarrow 48-7k \geq 0 \Leftrightarrow k \leq \frac{48}{7}$$

である。したがって、これらを合わせると、求める k の範囲は

$$-1+2\sqrt{6} < k \leq \frac{48}{7}$$

となる。

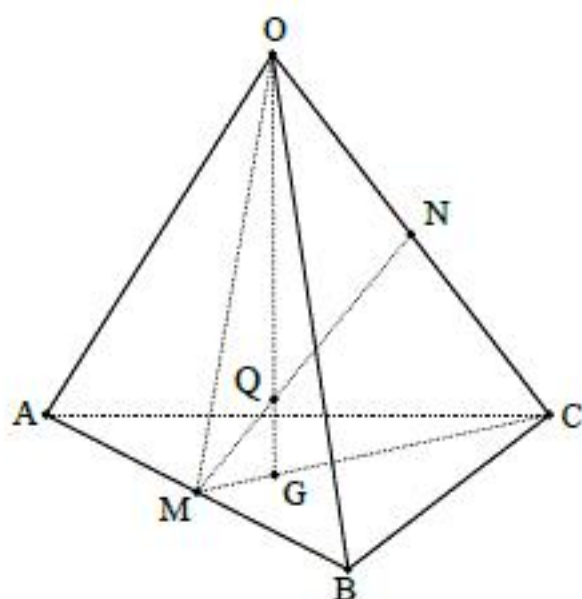
〔解答〕

イ	$-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$
ロ	$\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$
ハ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

〔解説〕

(1)

四面体 OABC を図示すると以下の通りになる。



点 M は辺 AB の中点であるから、 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ である。また、点 N は辺 OC の中点であるから、

$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\vec{c}$ である。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

(2)

まず、点 G は $\triangle ABC$ の重心であるから、 $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ である。そして、点 Q は線分 OG

上、線分 MN 上の両方に存在するから、ある実数 k, l を用いて、

$$\begin{cases} \overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OG} \\ \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + l\overrightarrow{MN} \end{cases}$$

と表すことができる。これを变形すると、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OG} \\ \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + l\overrightarrow{MN} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} + \frac{1}{3}k\vec{c} \\ \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(1-l)\vec{a} + \frac{1}{2}(1-l)\vec{b} + \frac{1}{2}l\vec{c} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるから、係数比較をすることで、

$$\begin{cases} \frac{1}{3}k = \frac{1}{2}(1-l) \\ \frac{1}{3}k = \frac{1}{2}l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ l = \frac{1}{2} \end{cases}$$

を得る。これを $\overrightarrow{OQ}$ の式に代入すれば、 $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$ を得る。

(3)

四面体 OABC のすべての辺の長さが 1 のとき、四面体 OABC は正四面体となる。したがって、

$\triangle OAB$ と $\triangle ABC$ は正三角形であり、 $\triangle OCM$ は $OM = MC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ の二等辺三角形である。また、

$ON = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}$ となるため、 $OC \perp MN$ であることから、

$$\cos \angle COM = \frac{ON}{OM} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

と求まる。

〔解答〕

イ	$\frac{1}{105}$
ロ	$\frac{1}{60}$
ハ	$\frac{1}{21}$

〔解説〕

(1)

まず、A, E, I, O, U, U, Zに含まれる2つのUを区別し、A, E, I, O, U₁, U₂, Zを並び替えると考える。このとき、7文字の並べ方は7!通りある。次に、A, I, Z, Uが続けて並ぶ場合の数を考える。このとき、A, I, Z, Uを1文字であると考え、残りのE, O, Uと合わせた4文字を並べると考えると、その並べ方は4!通りある。さらに、A, I, Z, Uに含まれるUがU₁, U₂のどちらであるかで2通りあるから、各カードを取り出す確率は同様に確からしいので、求める確率は、

$$\frac{2 \cdot 4!}{7!} = \frac{1}{105}$$

となる。

(2)

まず、7文字の並べ方は(1)と同様に7!通りある。次に、7個のスペースに7個の文字を入れていくと考える。このとき、E, Oの入る場所を選べば、あとは空いている5個のスペースに左から順にU, A, I, Z, Uを入れていけば、題意を満たす文字列ができる。このとき、左側のUがU₁, U₂のどちらであるかで2通りあり、E, Oのどちらが左側かで2通りある。したがって、求める確率は、

$$\frac{{}_7C_2 \cdot 2 \cdot 2}{7!} = \frac{1}{60}$$

となる。

(3)

まず、7文字の並べ方は(1)と同様に7!通りある。そして、A, IとZ, Uをそれぞれ1文字であると考え、残りのE, O, Uと合わせた5文字を並べると考えると、その並べ方は5!通りある。さらに、Z, Uに含まれるUがU₁, U₂のどちらであるかで2通りあるから、求める確率は、

$$\frac{2 \cdot 5!}{7!} = \frac{1}{21}$$

となる。

〔解答〕

イ	$-3t^2 + t + 6$
ロ	$t \geq 2$
ハ	0
ニ	-4

〔解説〕

(1)

$$t^2 = 3^{2x} + 3^{-2x} + 2 \Leftrightarrow 3^{2x} + 3^{-2x} = t^2 - 2 \text{ より,}$$

$$f(x) = t - 3(t^2 - 2) = -3t^2 + t + 6$$

となる。

(2)

 $3^x > 0, 3^{-x} > 0$ より、相加相乗平均の関係から、

$$t = 3^x \cdot 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}}$$

$$\therefore t \geq 2$$

であり、等号は $3^x = 3^{-x} \Leftrightarrow x = 0$ のとき成立するから、 t の最小値は 2 である。また、 $3^x + 3^{-x}$ は連続関数で、 $x \rightarrow \infty$ のとき $3^x + 3^{-x} \rightarrow \infty$ であるから、上限は存在しない。よって、 $t = 3^x + 3^{-x}$ のとりうる値の範囲は $t \geq 2$ である。

(3)

$$g(t) = -3t^2 + t + 6 \text{ とおくと,}$$

$$g(t) = -3t^2 + t + 6$$

$$= -3\left(t - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{73}{12}$$

より、 $g(t)$ は $t \geq 2$ で単調減少する。したがって、 $g(t)$ は $t = 2$ で最大値 -4 をとる。そして、 $t = 2$ となるのは (2) より、 $x = 0$ のときである。

(1)

まず,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \sin x + (1 + \sin x) \cos x \\ &= \cos x (1 + 2 \sin x) \end{aligned}$$

であるから, $0 \leq x \leq 2\pi$ より,

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0, \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

となる。また,

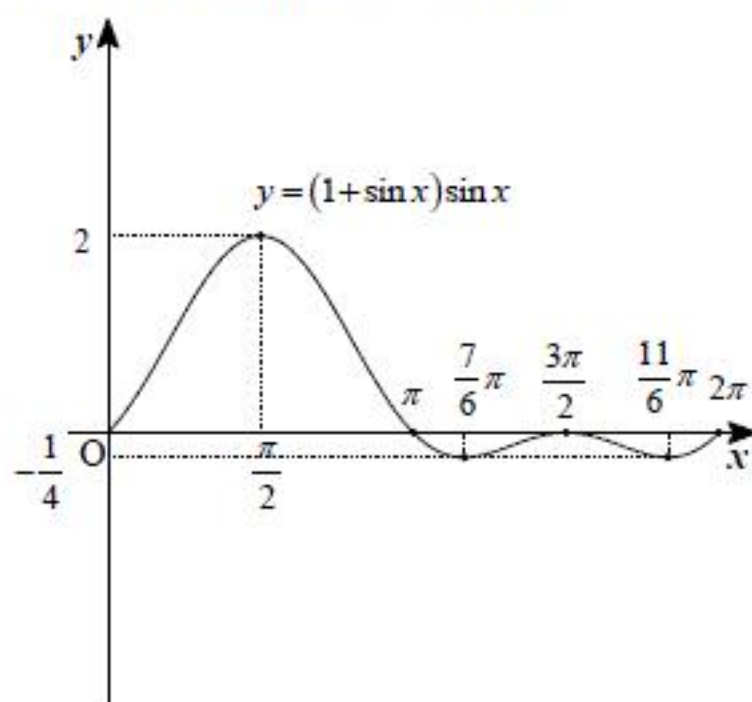
$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0, -1$$

$$\Leftrightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \frac{3}{2}\pi$$

である。したがって, 増減表をかくと以下の通りになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π	...	$\frac{7}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	$\frac{11}{6}\pi$	...	2π
$f'(x)$	$\searrow$	+	0	-	-	-	0	+	0	-	0	+	$\searrow$
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

よって, C を座標平面上に描くと以下の通りになる。

(答) 上図

(2)

(1)より $a = -\frac{1}{4}$ であるから, 求める面積 S は,

$$S = \int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} \left\{ f(x) + \frac{1}{4} \right\} dx$$

とかける。これを計算すると,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} \left(\sin x + \sin^2 x + \frac{1}{4} \right) dx \\ &= \int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} \left(\sin x + \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{4} \right) dx \\ &= \left[-\cos x + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$

数学的帰納法を利用して、 a が正の定数であるとき、自然数 n に対して

$$(a+2)^n \geq na+2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ での $\textcircled{1}$ の成立を示す。

$\textcircled{1}$ の左辺と右辺はともに $a+2$ となるから、 $\textcircled{1}$ の不等式が成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数)での $\textcircled{1}$ の成立を仮定して、 $n=k+1$ での $\textcircled{1}$ の成立を示す。

仮定より

$$(a+2)^k \geq ka+2$$

が成り立つ。両辺に $a+2$ をかけると、

$$(a+2)^{k+1} \geq (ka+2)(a+2) = 2(k+1)a + ka^2 + 4$$

であり、 $k, a > 0$ であるから $2(k+1)a + ka^2 + 4 > (k+1)a + 2$ である。したがって、

$$(a+2)^{k+1} \geq (k+1)a + 2$$

を得るから、 $n=k+1$ での $\textcircled{1}$ の成立が示された。

以上[1], [2]より、数学的帰納法によって題意が示された。

(証明終)