

2019 年度(平成 31 年度) 入学試験問題

数 学

【注意事項】

- 1 係員の指示があるまで、問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は 12 ページ、解答用紙は 4 枚あります。
- 3 落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所などがあったときは、手を挙げて係員に申し出ること。
- 4 各解答用紙(4 枚)の受験番号欄に受験番号を数字で記入すること。
- 5 解答は必ず各問題別の解答用紙の所定の欄に記入すること。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してかまいませんが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了時刻まで退室してはいけません。
- 8 解答用紙は持ち帰ってはいけません。その他は持ち帰ること。

1 以下の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位である。

(1) 次の積分を求めよ。

(i) $\int_0^1 e^x \sqrt{e^x - 1} dx =$ イ

(ii) $\int_1^e (\log x)^2 dx =$ ロ

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$ の値を求めよ。 ハ

(3) 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義されるとき、一般項を求めよ。 $a_n =$ ニ

(4) 方程式 $z^2 = -1 + \sqrt{3}i$ を解け。 $z =$ ホ, ヘ

(5) 整数全体の集合 U を全体集合とし、その部分集合を

$$A = \{x \mid x \text{ は } -8 \leq 5x + 3 < 28 \text{ を満たす整数}\},$$

$$B = \{x \mid x \text{ は } |3x - 11| \leq 14 \text{ を満たす整数}\}$$

とする。 $\overline{A \cap B}$ を要素を書き並べて表せ。 $\overline{A \cap B} =$ ト

(6) 直線 $y = x + 2$ と放物線 $y = x^2 - kx + 8$ が $0 \leq x \leq 7$ の範囲で共有点を 2 つ持つような定数 k の値の範囲を求めよ。 チ

(計 算 用 紙)

- 2 四面体 $OABC$ の辺 AB , OC の中点をそれぞれ M , N とし, $\triangle ABC$ の重心を G とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくとき, 以下の空欄をうめよ。

(1) $\overrightarrow{MN}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表すと $\overrightarrow{MN} =$ イ である。

(2) $\triangle OMC$ において, 線分 OG , MN の交点を Q とする。 $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表すと $\overrightarrow{OQ} =$ ロ である。

(3) 四面体 $OABC$ のすべての辺の長さが 1 のとき, $\cos \angle COM =$ ハ である。

(計 算 用 紙)

3

袋の中に一文字ずつ文字の書かれた7枚のカードが入れてあり、それぞれに書いてある文字はA, E, I, O, U, U, Zである。この袋からすべてのカードを一枚ずつ取り出して左から右に並べる。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 7文字のどこかにA, I, Z, Uの文字がこの順に続けて現れる確率を求めよ。

(2) U, A, I, Z, Uの文字がこの順に現れる確率を求めよ。ただし、続けて現れなくてもよい。

(3) Aの右隣にIがあり、Zの右隣にUがある確率を求めよ。

(計 算 用 紙)

4 関数 $f(x) = 3^x + 3^{-x} - 3^{2x+1} - 3^{-2x+1}$ について、以下の空欄をうめよ。

(1) $t = 3^x + 3^{-x}$ において $f(x)$ を t の式で表すと である。

(2) $t = 3^x + 3^{-x}$ のとりうる値の範囲は である。

(3) $f(x)$ は $x =$ のとき最大値 をとる。

(計 算 用 紙)

5

関数 $f(x) = (1 + \sin x) \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) を考える。 $y = f(x)$ のグラフを C とする。このとき、以下の問いに答えよ。(結論に至る過程も記述すること。)

- (1) $f(x)$ の増減, 極値, C と x 軸との共有点を調べて, C を座標平面上に描け。
 C の凹凸や変曲点は調べなくてよい。
- (2) $f(x)$ の最小値を a とするとき, C と直線 $y = a$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(計 算 用 紙)

- 6 a を正の定数とする。自然数 n に対して次の不等式がなりたつことを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$(a+2)^n \geq na+2$$

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)