

(1) 関数 $f(\theta) = \sin 2\theta + 2(\sin \theta + \cos \theta) - 1$ を考える。

ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。次の問いに答えよ。

(i) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおくとき、 $f(\theta)$ を t の式で表せ。

(ii) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(iii) $f(\theta)$ の最大値、最小値を求め、そのときの θ の値を求めよ。

- (2) 原点を O とする空間内の 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ に対し, A , B , C の定める平面を π とおく。ただし, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ とする。次の問いに答えよ。

- (i) 平面 π 上の点 P に対し, ベクトル $\overrightarrow{OP}$ は

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + (1-s-t)\overrightarrow{OC}$$

と表される。 $\overrightarrow{OP}$ が平面 π と垂直になるように, s, t の値を a, b, c を用いて表せ。

- (ii) 線分 AB の中点を M とし, 点 Q は $\overrightarrow{CQ} = r\overrightarrow{CM}$ を満たす点であるとする。

ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ の大きさ $|\overrightarrow{OQ}|$ を最小にする r の値と, そのときの $|\overrightarrow{OQ}|$ の値を, それぞれ a, b, c を用いて表せ。

- (iii) $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$, $\triangle ABC$ の面積を, それぞれ S_1, S_2, S_3, S とするとき,

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

が成立することを示せ。

- (3) a, b, c を実数とし, $a > 0$ とする。関数 $f(x) = x^2 - ax + 2$ と関数 $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ を考える。曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ は, 共有点 $A(x_0, y_0)$ をもち, 点 A において共通の接線 $y = 2x - 2$ をもつとする。関数 $F(x)$ を

$$x \leq x_0 \text{ のとき, } F(x) = f(x)$$

$$x > x_0 \text{ のとき, } F(x) = g(x)$$

と定める。このとき, 次の問いに答えよ。

- (i) 点 A の座標 (x_0, y_0) と a, b, c の値を求めよ。
- (ii) 関数 $F(x)$ の増減を調べ, 極値を求めよ。また, 曲線 $y = F(x)$ の概形をかき, 座標軸との交点と極値をとる点を記入せよ。
- (iii) 直線 $x = 0$ と直線 $y = 0$ および曲線 $y = F(x)$ によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。