

- (1) 原点を O とする空間内の 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ に対し, A, B, C の定める平面を π とおく。ただし, $a > 0, b > 0, c > 0$ とする。次の問いに答えよ。

- (i) 平面 π 上の点 P に対し, ベクトル $\overrightarrow{OP}$ は

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + (1 - s - t)\overrightarrow{OC}$$

と表される。 $\overrightarrow{OP}$ が平面 π と垂直になるように, s, t の値を a, b, c を用いて表せ。

- (ii) 線分 AB の中点を M とし, 点 Q は $\overrightarrow{CQ} = r\overrightarrow{CM}$ を満たす点であるとする。ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ の大きさ $|\overrightarrow{OQ}|$ を最小にする r の値と, そのときの $|\overrightarrow{OQ}|$ の値を, それぞれ a, b, c を用いて表せ。

- (iii) $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA, \triangle ABC$ の面積を, それぞれ S_1, S_2, S_3, S とするとき,

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

が成立することを示せ。

(2) 放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ における接線をそれぞれ l , m とし, l と m の交点を R とする。ただし, $p < q$ とする。 $\angle PRQ$ を θ とおくとき, 次の問いに答えよ。

(i) 点 R の座標を p, q を用いて表せ。

(ii) $\tan \theta$ を p, q を用いて表せ。

(iii) 点 R が直線 $y = -2$ 上を動くとき, $\tan \theta$ の最小値を求めよ。

(iv) $\angle RPQ$ を θ_1 , $\angle RQP$ を θ_2 とおくとき,

$$\frac{1}{\tan \theta_1} + \frac{1}{\tan \theta_2}$$

を p, q を用いて表せ。