

(1) 次の問いに答えよ。

- (i) 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n , および第 n 項までの和 $\sum_{k=1}^n a_k$ を n と x を用いて表せ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + x^2 + 2x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (ii) (i)の数列 $\{a_n\}$ に対し, $f(x) = \sum_{k=1}^3 a_k$ とする。また $g(x) = -x^3 + 4x^2 + 12x + 7$ とする。曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ とで囲まれた図形において, $|f(x) - g(x)|$ が最大となるときの x の値を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の内部に点 P を, $2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ をみたすようにとる。直線 AP と辺 BC との交点を D とし, $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ の重心をそれぞれ E , F , G とする。次の問いに答えよ。

(i) $\overrightarrow{PD}$ を $\overrightarrow{PB}$ および $\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

(ii) $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{AC}$ (k は実数) であることを示せ。

(iii) $\triangle EFG$ と $\triangle PDC$ の面積の比を求めよ。

(3) 関数 $f(x) = xe^{-ax} + b$ について、次の問いに答えよ。ただし、 a, b は正の定数とする。

(i) 関数 $y = f(x)$ の増減、極値、凹凸および変曲点を調べよ。

(ii) 変曲点における接線と法線が y 軸とそれぞれ点 $(0, 4e^{-2} + 2e^2)$ と点 $(0, 2e^{-2})$ とで交わるとき、定数 a, b の値を求めよ。

(iii) (ii) で求めた a, b に対し、曲線 $y = f(x)$ と、その変曲点における接線、および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。