

(1)

(i)

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax - 1$$

について、 $f(x) = 0$ が $x = \frac{1}{2}$ を解としてもつことから

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 3 \end{aligned}$$

である。

(答) 3

(ii)

$a = 3$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ &= (2x - 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

である。ここで、2次式 $x^2 - x + 1 = 0$ の判別式を D とおくと、

$$D = 1 - 4 < 0$$

となるため、 $x^2 - x + 1 = 0$ は実数の解を持たず、 $x^2 - x + 1$ は実数の範囲で因数分解することはできない。したがって、答えは

$$f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 1)$$

となる。

(答) $f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 1)$

(iii)

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

より、 $x^2 - x + 1$ は任意の実数 x で正の値をとるから、

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 1)(x^2 - x + 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow 2x - 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow x &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $x > \frac{1}{2}$

(iv)

α, β は2次方程式 $x^2 - x + 1 = 0$ の解である。

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

である。 $\alpha = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ とおき、

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1 - 3\sqrt{3}i - 9 + 3\sqrt{3}i}{8} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta^3 &= \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1 + 3\sqrt{3}i - 9 - 3\sqrt{3}i}{8} \\ &= -1 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \alpha^{30} + \beta^{30} &= (\alpha^3)^{10} + (\beta^3)^{10} \\ &= (-1)^{10} + (-1)^{10} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) 2

(2)

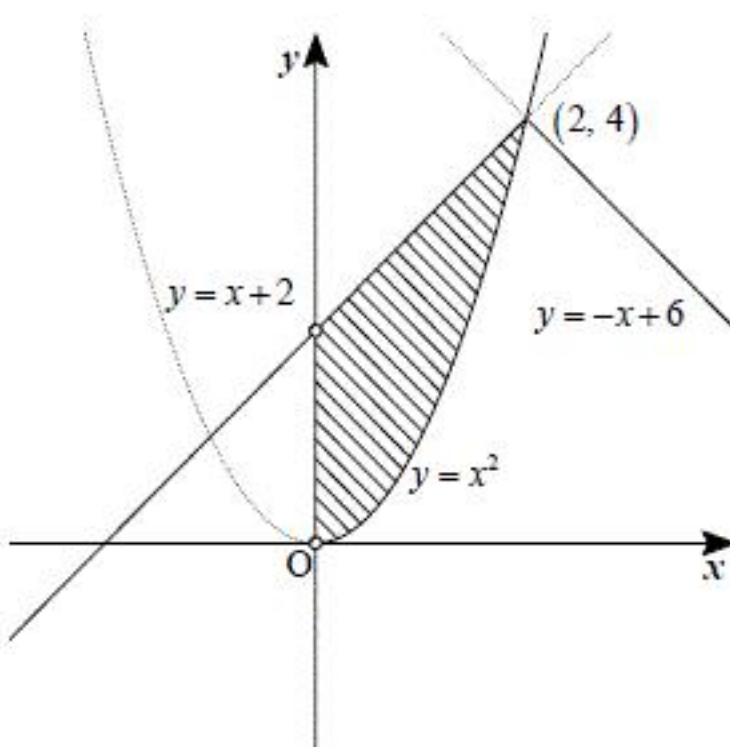
(i)

$$\begin{aligned}2\log_2 x - \log_2 y &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 x^2 &\leq \log_2 y \text{ かつ } x > 0 \text{ かつ } y > 0 \\ \Leftrightarrow y &\geq x^2 \text{ かつ } x > 0\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}|x-2|+y-4 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)+y-4 \leq 0 & (x \geq 2) \\ -(x-2)+y-4 \leq 0 & (x < 2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -x+6 & (x \geq 2) \\ y \leq x+2 & (x < 2) \end{cases}\end{aligned}$$

である。以上より、 D を図示すると下図の斜線部ようになる。境界は $x=0$ を含まず、他は含む。



(答) 前図

(ii)

$-\frac{1}{2}x+y=m$ とすると、 $y=\frac{1}{2}x+m$ である。 m が最小となるのは、直線 $y=\frac{1}{2}x+m$ が領域 D と共有点を持ち、最も y 軸負側にあるときで、そのとき(i)の図より直線 $y=\frac{1}{2}x+m$ と曲線 $y=x^2$ は接する。よって、 $y'=\frac{1}{2}$ のとき m は最小だから、 $y=x^2$ について $y'=2x$ であることより、 $x=\frac{1}{4}$ のとき m は最小となる。このとき、

$$\begin{aligned}y &= x^2 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{1}{16}\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}m &= -\frac{1}{2}x+y \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \\ &= -\frac{1}{16}\end{aligned}$$

となる。一方、 $x^2+y^2-y=n$ とすると、

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = n + \frac{1}{4}$$

であり、この式は点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\sqrt{n+\frac{1}{4}}$ の円を表す。(i)の図より、 n が最大となるのは、円の外周が $(2, 4)$ を通るときである。そのとき、

$$\begin{aligned}n + \frac{1}{4} &= 2^2 + \left(4 - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{65}{4} \\ \Leftrightarrow n &= 16\end{aligned}$$

である。以上より、点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき、 $-\frac{1}{2}x+y$ は最小値 $-\frac{1}{16}$ をとり、そのときの点 P の座標は $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$ であり、 x^2+y^2-y は最大値16をとり、そのときの点 P の座標は $(2, 4)$ である。

$$\begin{array}{llll} \text{(答)} & -\frac{1}{2}x+y \text{ の最小値} & -\frac{1}{16} & \text{点 } P \text{ の座標 } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right) \\ & x^2+y^2-y \text{ の最大値} & 16 & \text{点 } P \text{ の座標 } (2, 4) \end{array}$$

(iii)

$$\begin{aligned}2x+y-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= -2x+4\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}4^x + 2^y &= 4^x + 2^{-2x+4} \\ &= 4^x + 16 \cdot \frac{1}{4^x} \\ &\geq 2\sqrt{4^x \cdot 16 \cdot \frac{1}{4^x}} \\ &= 8 \text{ (等号成立は } 4^x = 16 \cdot \frac{1}{4^x} \Leftrightarrow x=1 \text{ のときである。)}\end{aligned}$$

である。 $2x+y-4=0$ について、 $x=1$ のとき $y=2$ であり、(i)より点 $(1, 2)$ は領域 D 内の点である。以上より、領域 D 内の点 $P(x, y)$ が、方程式 $2x+y-4=0$ を満たしながら動くとき、 4^x+2^y は最小値8をとり、そのとき $x=1$ で、点 P の座標は $(1, 2)$ である。

(答) 最小値 8, 点 P の座標 $(1, 2)$

(3)

(i)

$\triangle POH$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot |OH| \cdot |PH| \\ &= \frac{1}{2} x \cdot y \\ &= \frac{1}{2} x(x^2 - 4x + 5) \\ &= \frac{1}{2} x^3 - 2x^2 + \frac{5}{2} x \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dx} &= \frac{1}{2}(3x^2 - 8x + 5) \\ &= \frac{1}{2}(3x - 5)(x - 1) \end{aligned}$$

である。したがって、 S の x ($1 \leq x \leq 5$) についての増減表は下のようになる。

x	1		$\frac{5}{3}$		5
$\frac{dS}{dx}$		-	0	+	
S	1	$\searrow$	$\frac{25}{27}$	$\nearrow$	25

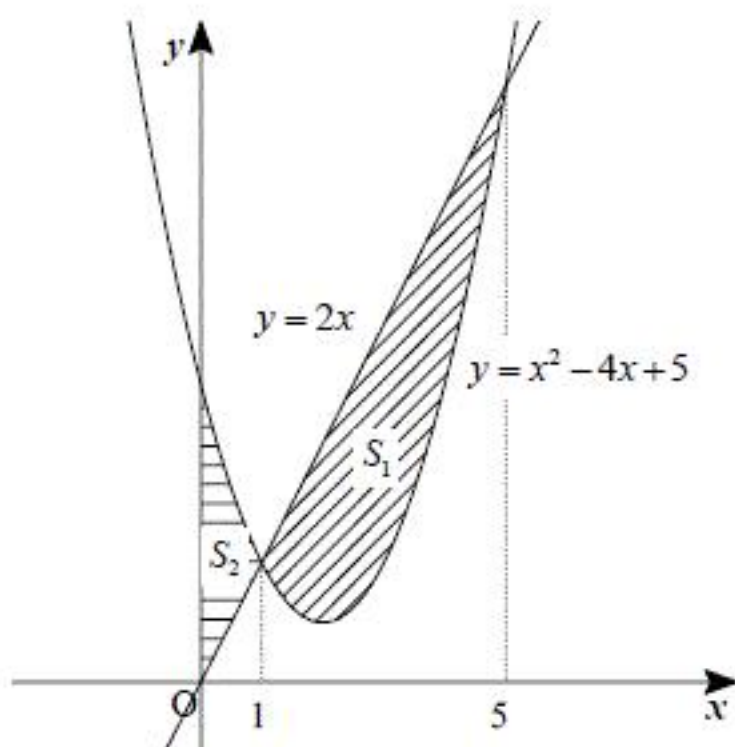
以上より $\triangle POH$ の面積は、 $x = \frac{5}{3}$ のとき最小値をとり、 $x = 5$ のとき最大値 25 をとる。

(答) 最小値 $\frac{25}{27}$, 最大値 25

(ii)

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 5 &= 2x \\ \Leftrightarrow x &= 1, 5 \end{aligned}$$

であり、 S_1, S_2 の概形は下図のようになる。



以上より

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \int_1^5 \{(2x) - (x^2 - 4x + 5)\} dx + \int_0^1 \{(x^2 - 4x + 5) - (2x)\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x \right]_1^5 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x \right]_0^1 \\ &= \left\{ \frac{25}{3} - \left(-\frac{7}{3} \right) \right\} + \left(\frac{7}{3} - 0 \right) \\ &= 13 \end{aligned}$$

となる。

(答) 13