

(1)

(i)

$x=y$ のときに、与式は 0 になることから、 $x-y$ を因数にもつことを使って、因数分解の式変形をする。

$$\begin{aligned}x(x+1)(x+2)-y(y+1)(y+2)+xy(x-y) &= (x^3+3x^2+2x)-(y^3+3y^2+2y)+xy(x-y) \\&= (x^3-y^3)+3(x^2-y^2)+2(x-y)+xy(x-y) \\&= (x-y)\{(x^2+xy+y^2)+3(x+y)+2+xy\} \\&= (x-y)\{x^2+2xy+y^2+3(x+y)+2\} \\&= (x-y)\{(x+y)^2+3(x+y)+2\} \\&= (x-y)(x+y+1)(x+y+2)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) (x-y)(x+y+1)(x+y+2)$$

(ii)

多項式 $f(x)$ を $(x-1)(x-3)$ で割った余りが $x+1$ であるから、商を $q_1(x)$ として

$$f(x)=(x-1)(x-3)q_1(x)+(x+1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、多項式 $f(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割った余りが $3x-1$ であるから、商を $q_2(x)$ として

$$f(x)=(x-1)(x-2)q_2(x)+(3x-1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。 $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$ であり、 $f(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割った余りは高々 2 次式であるから、商を $q(x)$ として、定数 a, b, c を使って

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)q(x)+a(x-1)(x-2)+b(x-1)(x-3)+c(x-2)(x-3) \\&\quad \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

とおける。①、②より $f(1)=2$ であるから、③より

$$2c=2 \Leftrightarrow c=1$$

となる。②より $f(2)=5$ であるから、③より

$$-b=5 \Leftrightarrow b=-5$$

となる。①より $f(3)=4$ であるから、③より

$$2a=4 \Leftrightarrow a=2$$

となる。以上より、 $f(x)$ を $x^3-6x^2+11x-6$ で割ったときの余りは

$$\begin{aligned}a(x-1)(x-2)+b(x-1)(x-3)+c(x-2)(x-3) &= 2(x-1)(x-2)-5(x-1)(x-3)+(x-2)(x-3) \\&= -2x^2+9x-5\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) -2x^2+9x-5$$

(2)

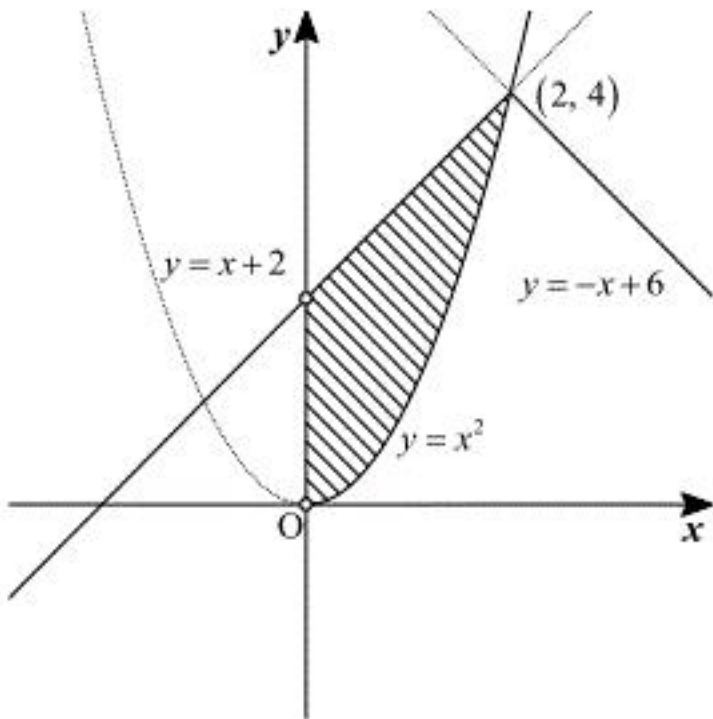
(i)

$$\begin{aligned}2\log_2 x - \log_2 y &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 x^2 &\leq \log_2 y \text{ かつ } x > 0 \text{ かつ } y > 0 \\ \Leftrightarrow y &\geq x^2 \text{ かつ } x > 0\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}|x-2|+y-4 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)+y-4 \leq 0 & (x \geq 2) \\ -(x-2)+y-4 \leq 0 & (x < 2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -x+6 & (x \geq 2) \\ y \leq x+2 & (x < 2) \end{cases}\end{aligned}$$

である。以上より、 D を図示すると下図の斜線部ようになる。境界は $x=0$ を含まず、他は含む。



(答) 前図

(ii)

$-\frac{1}{2}x+y=m$ とすると、 $y=\frac{1}{2}x+m$ である。 m が最小となるのは、直線 $y=\frac{1}{2}x+m$ が領域 D と共有点を持ち、最も y 軸負側にあるときで、そのとき(i)の図より直線 $y=\frac{1}{2}x+m$ と曲線 $y=x^2$ は接する。よって、 $y'=\frac{1}{2}$ のとき m は最小だから、 $y=x^2$ について $y'=2x$ であることより、 $x=\frac{1}{4}$ のとき m は最小となる。このとき、

$$\begin{aligned}y &= x^2 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{1}{16}\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}m &= -\frac{1}{2}x+y \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \\ &= -\frac{1}{16}\end{aligned}$$

となる。一方、 $x^2+y^2-y=n$ とすると、

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=n+\frac{1}{4}$$

であり、この式は点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\sqrt{n+\frac{1}{4}}$ の円を表す。(i)の図より、 n が最大となるのは、円の外周が $(2,4)$ を通るときである。そのとき、

$$\begin{aligned}n+\frac{1}{4} &= 2^2+\left(4-\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{65}{4} \\ \Leftrightarrow n &= 16\end{aligned}$$

である。以上より、点 $P(x,y)$ が領域 D 内を動くとき、 $-\frac{1}{2}x+y$ は最小値 $-\frac{1}{16}$ をとり、そのときの点 P の座標は $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)$ であり、 x^2+y^2-y は最大値16をとり、そのときの点 P の座標は $(2,4)$ である。

(答)	$-\frac{1}{2}x+y$ の最小値	$-\frac{1}{16}$	点Pの座標	$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)$
	x^2+y^2-y の最大値	16	点Pの座標	(2,4)

(iii)

$$\begin{aligned}2x+y-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= -2x+4\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}4^x+2^y &= 4^x+2^{-2x+4} \\ &= 4^x+16 \cdot \frac{1}{4^x} \\ &\geq 2\sqrt{4^x \cdot 16 \cdot \frac{1}{4^x}} \\ &= 8 \text{ (等号成立は } 4^x=16 \cdot \frac{1}{4^x} \Leftrightarrow x=1 \text{ のときである。)}\end{aligned}$$

である。 $2x+y-4=0$ について、 $x=1$ のとき $y=2$ であり、(i)より点 $(1,2)$ は領域 D 内の点である。以上より、領域 D 内の点 $P(x,y)$ が、方程式 $2x+y-4=0$ を満たしながら動くとき、 4^x+2^y は最小値8をとり、そのとき $x=1$ で、点 P の座標は $(1,2)$ である。

(答) 最小値 8, 点Pの座標 (1,2)

(3)

(i)

点 P は三角形 ABC の内部、もしくは辺上の点であるから

$$\triangle PBC + \triangle PCA + \triangle PAB = \triangle ABC$$

であり、

$$\frac{1}{2}(as+bt+cu)=R$$

$$\Leftrightarrow as+bt+cu=2R \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。①を満たす 0 以上の s, t, u の組み合わせそれぞれに対して三角形 ABC の内部、もしくは辺上の点が一意的に定まるから

$$0 \leq s \leq \frac{2R}{a} \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$0 \leq t \leq \frac{2R}{b} \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$0 \leq u \leq \frac{2R}{c} \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

としたとき、②かつ③かつ④が点 P が三角形 ABC の内部、もしくは辺上の点である条件となる。①、④より

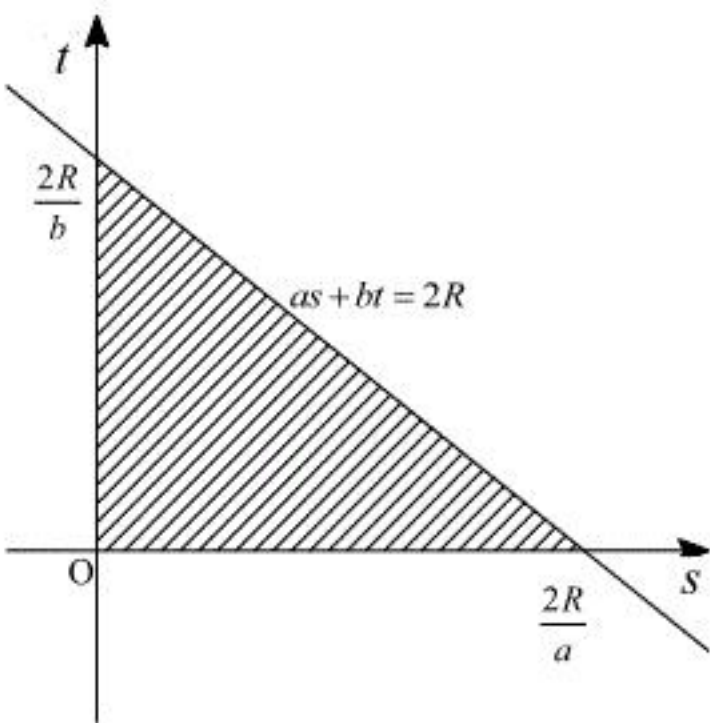
$$0 \leq 2R - (as+bt) \leq 2R$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq as+bt \leq 2R \qquad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

である。以上より、求める条件は②かつ③かつ⑤、すなわち

$$s \geq 0, \quad t \geq 0, \quad as+bt \leq 2R$$

である。これを図示すると下図のようになる。但し、境界を含む。



(答) $s \geq 0, \quad t \geq 0, \quad as+bt \leq 2R$, 図 :前図

(ii)

$2R=15, a=c=5, b=\sqrt{10}$ であるから

$$s_0=3, t_0=\frac{15}{\sqrt{30}}, u_0=3$$

である。 $\frac{s}{s_0}=\frac{t}{t_0}=\frac{u}{u_0}=k$ とおくと

$$s=s_0k=3k$$

$$t=t_0k=\frac{15}{\sqrt{10}}k$$

$$u=u_0k=3k$$

である。(i)の①に代入して $k=\frac{1}{3}$ を得る。また、 $s=1$ より点 $P(x_p, 1)$ とおけて、直線 AB, CA と

の距離がそれぞれ $1, \frac{\sqrt{10}}{2}$ であり、直線 AB: $3x-4y=0$, 直線 CA: $3x+y-15=0$ より

$$\frac{|3x_p-4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$$

$$\Leftrightarrow |3x_p-4|=5$$

$$\Leftrightarrow 3x_p-4=\pm 5$$

$$\Leftrightarrow x_p=3, -\frac{1}{3}$$

$$\frac{|3x_p-14|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\Leftrightarrow |3x_p-14|=5$$

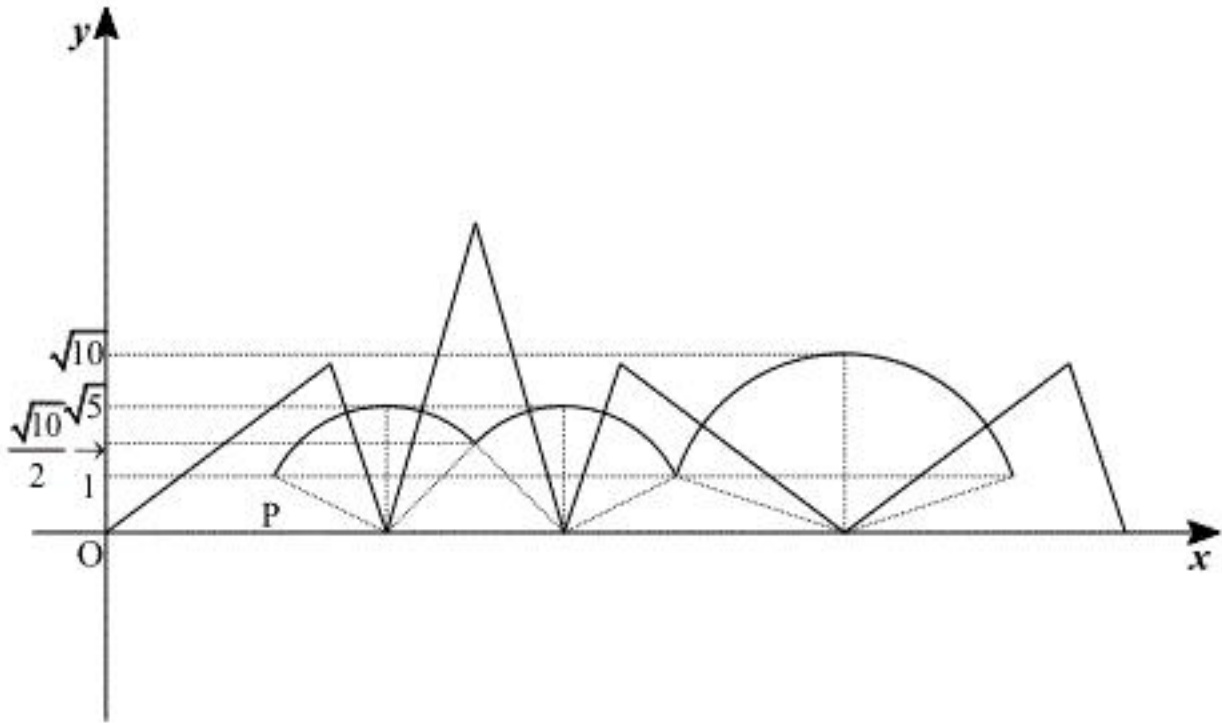
$$\Leftrightarrow 3x_p-14=\pm 5$$

$$\Leftrightarrow x_p=\frac{19}{3}, 3$$

であるから、 $x_p=3$ であり、点 $(3, 1)$ は確かに三角形 ABC の内部にある。以上より、点 $P(3, 1)$ である。

(答) $(3, 1)$

(iii)



三角形 ABC が x 軸に沿って滑らずに 1 回転すると、点 P は上の図の曲線のように動く。したがって、点 Q の移動する距離は

$$(\sqrt{5}-1)+\left(\sqrt{5}-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)+\left(\sqrt{5}-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)+(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{10}-1)+(\sqrt{10}-1)=\sqrt{10}+4\sqrt{5}-4$$

である。

(答) $\sqrt{10}+4\sqrt{5}-4$

(4)

(i)

2 定点 $A(-\sqrt{3}, 0)$, $B(\sqrt{3}, 0)$ に対して, $\angle APB = 60^\circ$ を満たす動点 $P(x, y) (y > 0)$ は定円上を動く。その定円の中心点 M は, 対称性より, 線分 AB の垂直二等分線上 (y 軸) 上にある。

$$\angle AMO = \angle BMO = \frac{1}{2} \angle AMB = \frac{1}{2} \angle APB = 60^\circ$$

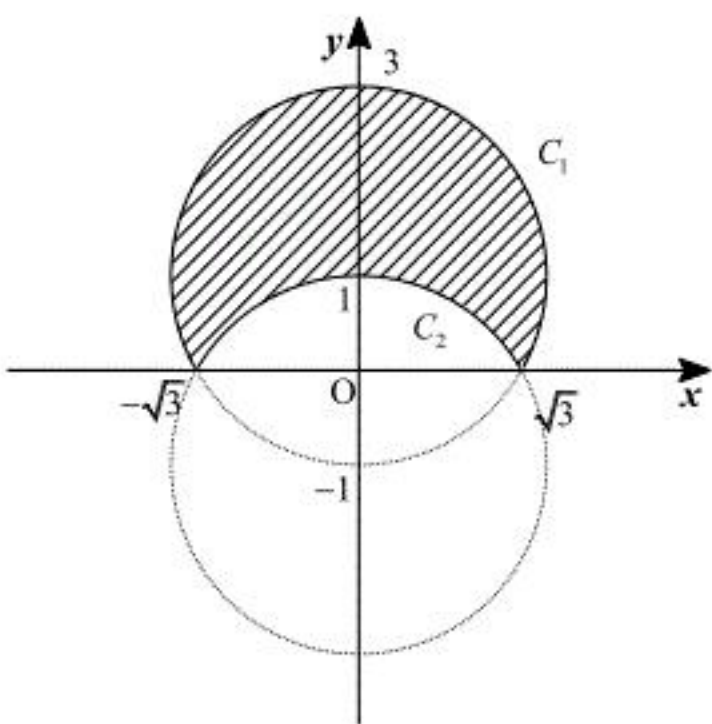
である。よって, 点 $M(0, 1)$ であり, 円の半径は $AM = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ である。したがって, C_1 の方程式は,

$$x^2 + (y - 1)^2 = 4 (y > 0)$$

である。 C_2 についても同様に考えると, C_2 は C_1 を x 軸を対象に映したものだから, C_2 の方程式は

$$x^2 + (y + 1)^2 = 4 (y > 0)$$

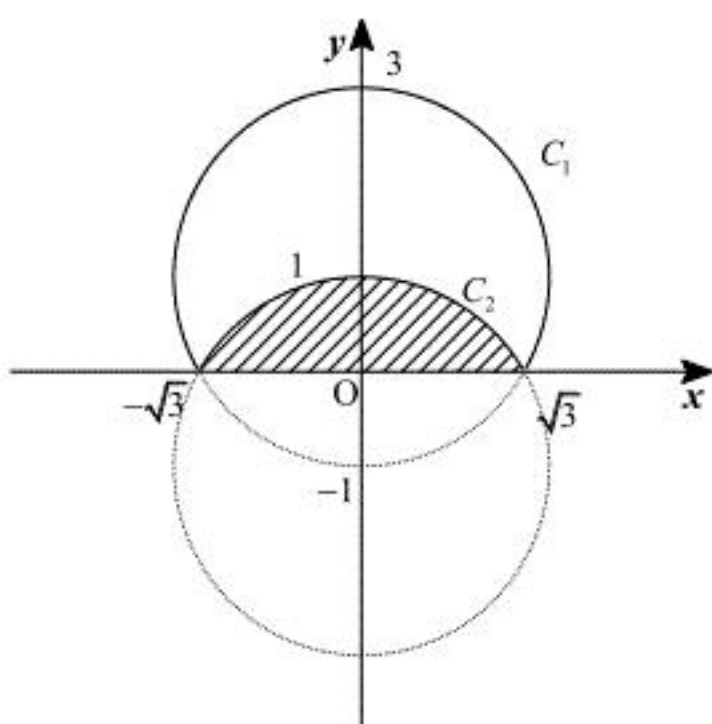
である。以上より, 領域 S を図示すると下図の斜線部ようになる。但し, 境界を含む。



(答) $C_1: x^2 + (y - 1)^2 = 4 (y > 0)$, $C_2: x^2 + (y + 1)^2 = 4 (y > 0)$, 図: 前図

(ii)

図形 S を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積は, 半径 2 の球の体積から, 下図の斜線部を y 軸を中心に回転させて出来る回転体の体積の 2 倍をひいたものである。



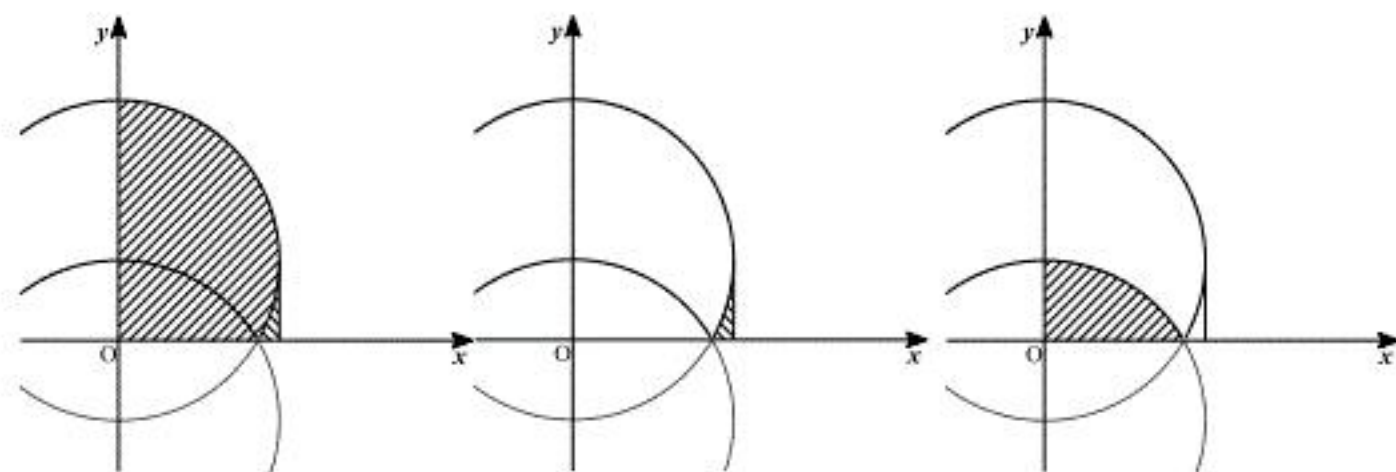
よって, 求める体積は,

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 - 2\pi \int_0^1 x^2 dy &= \frac{32}{3} \pi - 2\pi \int_0^1 \{4 - (y + 1)^2\} dy \\ &= \frac{32}{3} \pi + 2\pi \int_0^1 (y^2 + 2y - 3) dy \\ &= \frac{32}{3} \pi + 2\pi \left[\frac{1}{3} y^3 + y^2 - 3y \right]_0^1 \\ &= \frac{32}{3} \pi - \frac{10}{3} \pi \\ &= \frac{22}{3} \pi \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{22}{3} \pi$

(iii)



上図の斜線部を x 軸を中心に回転させたときのそれぞれの体積を V_1, V_2, V_3 とし, 求める体積を V とすると,

$$V = 2(V_1 - V_2 - V_3)$$

である。

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^2 (1 + \sqrt{4 - x^2})^2 dx = \pi \int_0^2 (5 - x^2 + 2\sqrt{4 - x^2}) dx \\ V_2 &= \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1 - \sqrt{4 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (5 - x^2 - 2\sqrt{4 - x^2}) dx \\ V_3 &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} (-1 + \sqrt{4 - x^2})^2 dx = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (5 - x^2 - 2\sqrt{4 - x^2}) dx \end{aligned}$$

であるから,

$$V = 2 \cdot 4\pi \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

であり, $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ は, 半径 2 の円の面積の $\frac{1}{4}$ であるから, $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \pi$ である。以上より,

$$V = 8\pi^2$$

である。

(答) $8\pi^2$