

(1)

(i)

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax - 1$$

について、 $f(x) = 0$ が $x = \frac{1}{2}$ を解としてもつことから

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 3 \end{aligned}$$

である。

(答) $a = 3$

(ii)

$a = 3$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ &= (2x - 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

である。ここで、2次式 $x^2 - x + 1 = 0$ の判別式を D とおくと、

$$D = 1 - 4 < 0$$

となるため、 $x^2 - x + 1 = 0$ は実数の解を持たず、 $x^2 - x + 1$ は実数の範囲で因数分解することはできない。したがって、答えは

$$f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 1)$$

となる。

(答) $f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 1)$

(iii)

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

より、 $x^2 - x + 1$ は任意の実数 x で正の値をとるから、

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 1)(x^2 - x + 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow 2x - 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow x &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $x > \frac{1}{2}$

(iv)

α, β は 2 次方程式 $x^2 - x + 1 = 0$ の解である。

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

である。 $\alpha = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ とおき、

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1 - 3\sqrt{3}i - 9 + 3\sqrt{3}i}{8} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta^3 &= \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1 + 3\sqrt{3}i - 9 - 3\sqrt{3}i}{8} \\ &= -1 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \alpha^{30} + \beta^{30} &= (\alpha^3)^{10} + (\beta^3)^{10} \\ &= (-1)^{10} + (-1)^{10} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) 2

(2)

(i)

条件より式変形して

$$\begin{aligned}x_{n+2} &= \frac{4}{3}y_{n+1} \\&= \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)x_n \\&= -2x_n \\y_{n+2} &= -\frac{3}{2}x_{n+1} \\&= -\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}y_n \\&= -2y_n\end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad x_{n+2} = -2x_n, \quad y_{n+2} = -2y_n$$

(ii)

(i)より,

$$\begin{aligned}x_{2n+1} &= (-2)^n x_1 \\&= (-2)^n a \\y_{2n+1} &= (-2)^n y_1 \\&= (-2)^n b \\x_{2n+2} &= \frac{4}{3}y_{2n+1} \\&= \frac{4}{3}(-2)^n b \\y_{2n+2} &= -\frac{3}{2}x_{2n+1} \\&= -\frac{3}{2}(-2)^n a\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x_{2n+1} = (-2)^n a, \quad y_{2n+1} = (-2)^n b, \quad x_{2n+2} = \frac{4}{3}(-2)^n b, \quad y_{2n+2} = -\frac{3}{2}(-2)^n a$$

(iii)

(ii)から

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=1}^{2n+2} x_k \\&= \sum_{k=0}^n x_{2k+1} + \sum_{k=0}^n x_{2k+2} \\&= a \sum_{k=0}^n (-2)^k + \frac{4}{3}b \sum_{k=0}^n (-2)^k \\&= \left(a + \frac{4}{3}b\right) \sum_{k=0}^n (-2)^k \\&= \left(a + \frac{4}{3}b\right) \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)} \\&= \frac{1}{3} \left(a + \frac{4}{3}b\right) \{1 - (-2)^{n+1}\} \\\\T &= \sum_{k=1}^{2n+2} y_k \\&= \sum_{k=0}^n y_{2k+1} + \sum_{k=0}^n y_{2k+2} \\&= b \sum_{k=0}^n (-2)^k - \frac{3}{2}a \sum_{k=0}^n (-2)^k \\&= \left(b - \frac{3}{2}a\right) \sum_{k=0}^n (-2)^k \\&= \left(b - \frac{3}{2}a\right) \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)} \\&= \frac{1}{3} \left(b - \frac{3}{2}a\right) \{1 - (-2)^{n+1}\}\end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{3} \left(a + \frac{4}{3}b\right) \{1 - (-2)^{n+1}\}, \quad T = \frac{1}{3} \left(b - \frac{3}{2}a\right) \{1 - (-2)^{n+1}\}$$

(3)

(i)

$f(x) = 3x^4 - 4x^3$ について

$$f'(x) = 12(x^3 - x^2)$$

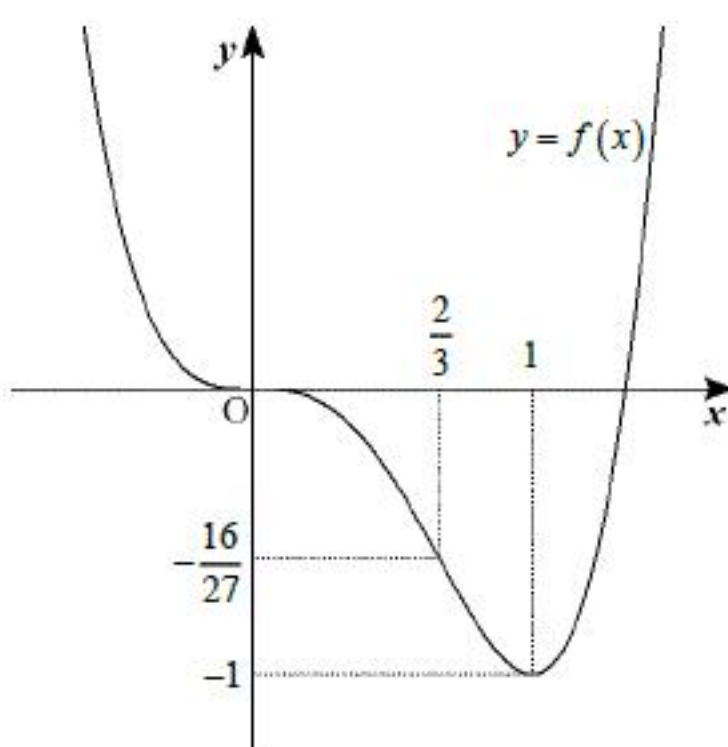
$$= 12x^2(x - 1)$$

$$f''(x) = 36x^2 - 24x$$

$$= 12x(3x - 2)$$

であるから、 $y = f(x)$ について、下の増減表、及びグラフを得る。

x		0		$\frac{2}{3}$		1	
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+	+	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{16}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$



以上より、極値は-1であり、そのときの x の値は1である。また、 $f(0) = 0$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{16}{27}$ より、

変曲点の座標は $(0, 0)$ および $\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$ である。

(答) 極値-1, 極値を与える x の値 1, 変曲点の座標 $(0, 0)$, $\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$

(ii)

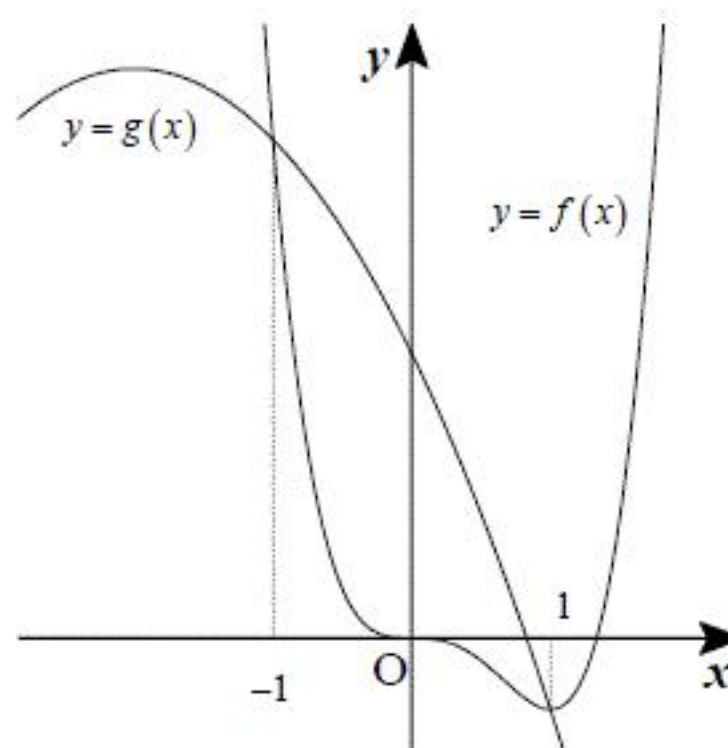
$f(-1) = 7$ であるから、 $y = g(x)$ は2点 $(-1, 7)$, $(1, -1)$ を通る。したがって

$$-1 - a + b = 7$$

$$-1 + a + b = -1$$

を得る。これを解いて $(a, b) = (-4, 4)$ となる。よって、 $g(x) = -x^2 - 4x + 4$ である。

$-x^2 - 4x + 4 = -(x+2)^2 + 8$ であるから、 $y = f(x)$, $y = g(x)$ について下のグラフを得る。



(グラフは x 軸方向に拡大してある。)

従って、2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ に囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx \\ &= \int_{-1}^1 (-3x^4 - 4x^3 - x^2 - 4x + 4) dx \\ &= 2 \int_0^1 (-3x^4 - x^2 + 4) dx \\ &= 2 \left[-\frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_0^1 \\ &= 2 \left(-\frac{3}{5} - \frac{1}{3} + 4 \right) \\ &= 2 \cdot \frac{46}{15} \\ &= \frac{92}{15} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = -4$, $b = 4$, $S = \frac{92}{15}$