

(1)

(i)

2項定理より

$$\begin{aligned}(x+2y)^4 &= \sum_{k=0}^4 {}_4C_k \cdot x^{4-k} \cdot (2y)^k \\&= x^4 + 4x^3 \cdot (2y) + 6x^2 \cdot (2y)^2 + 4x \cdot (2y)^3 + (2y)^4 \\&= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$$

(ii)

多項定理より

$$(x+2y+z)^7$$

の展開式の一般項は

$$\frac{7!}{p!q!r!} x^p \cdot (2y)^q \cdot z^r = \frac{7! \cdot 2^q}{p!q!r!} x^p y^q z^r$$

(ただし $p+q+r=7$, p, q, r は 0 以上の整数)

と表わされるので $x^2y^2z^3$ の係数は

$$\frac{7! \cdot 2^2}{2!2!3!} = 840$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 840$$

(iii)

2項定理より

$$(1+ax)^5 \left(x - \frac{2}{x} \right)^4$$

の展開式の一般項は

$$\left\{ {}_5C_k \cdot (ax)^k \right\} \left\{ {}_4C_l x^{4-l} \left(-\frac{2}{x} \right)^l \right\} = {}_5C_k \cdot {}_4C_l \cdot a^k \cdot (-2)^l \cdot x^{k+4-2l}$$

(ただし k は 0 以上 5 以下の整数, l は 0 以上 4 以下の整数)

と表わされる。

$$\begin{aligned}k+4-2l &= 4 \\ \Leftrightarrow k &= 2l\end{aligned}$$

より, x^4 の係数となるのは

$$(k, l) = (0, 0), (2, 1), (4, 2)$$

となるときであるので x^4 の係数の値は

$${}_5C_0 \cdot {}_4C_0 \cdot a^0 \cdot (-2)^0 + {}_5C_2 \cdot {}_4C_1 \cdot a^2 \cdot (-2)^1 + {}_5C_4 \cdot {}_4C_2 \cdot a^4 \cdot (-2)^2 = 1 - 80a^2 + 120a^4$$

となる。これが 41 に等しいとき,

$$\begin{aligned}1 - 80a^2 + 120a^4 &= 41 \\ \Leftrightarrow 3a^4 - 2a^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^2 - 1)(3a^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 1 &= 0 \\ \therefore a &= \pm 1\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \pm 1$$

(別解)

二項定理より,

$$\begin{aligned}(1+ax)^5 &= {}_5C_0 + {}_5C_1 ax + {}_5C_2 (ax)^2 + {}_5C_3 (ax)^3 + {}_5C_4 (ax)^4 + {}_5C_5 (ax)^5 \\&= a^5 x^5 + 5a^4 x^4 + 10a^3 x^3 + 10a^2 x^2 + 5ax + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{2}{x} \right)^4 &= {}_4C_0 x^4 + {}_4C_1 x^3 \left(-\frac{2}{x} \right) + {}_4C_2 x^2 \left(-\frac{2}{x} \right)^2 + {}_4C_3 x \left(-\frac{2}{x} \right)^3 + {}_4C_4 \left(-\frac{2}{x} \right)^4 \\&= x^4 - 8x^2 + 24 - \frac{32}{x^2} + \frac{16}{x^4}\end{aligned}$$

であるから, $(1+ax)^5 \left(x - \frac{2}{x} \right)^4$ の展開式における x^4 の係数は,

$$1 \cdot 1 + 10a^2 \cdot (-8) + 5a^4 \cdot 24 = 1 - 80a^2 + 120a^4$$

となる。これが 41 に等しいとき,

$$\begin{aligned}1 - 80a^2 + 120a^4 &= 41 \\ \Leftrightarrow 3a^4 - 2a^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^2 - 1)(3a^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 1 &= 0 \\ \therefore a &= \pm 1\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \pm 1$$

(2)

(i)

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 2a_n + 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} + 1 &= 2(a_n + 1) \\ \Leftrightarrow a_n &= 2(a_1 + 1)^{n-1} - 1\end{aligned}$$

より, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}a_n &= 2(1+1)^{n-1} - 1 \\ &= 2^n - 1\end{aligned}$$

であり, これは $n=1$ のときも成立する。よって求める数列 $\{a_n\}$ の一般項は,

$$2^n - 1$$

である。

(答) $2^n - 1$

(ii)

(i)の結果より,

$$a_2 = 3, a_3 = 7$$

であるから,

$$\begin{aligned}4^{b_1-1} \cdot 4^{b_2-1} &= (a_2 + 1)^{b_3} \\ \Leftrightarrow 4^{b_1-1} \cdot 4^{5-1} &= (3+1)^5 \\ \Leftrightarrow 4^{b_1-1} &= 4 \\ \therefore b_1 &= 2\end{aligned}$$

となり, また,

$$\begin{aligned}4^{b_1-1} \cdot 4^{b_2-1} \cdot 4^{b_3-1} &= (a_3 + 1)^{b_4} \\ \Leftrightarrow 4^{2-1} \cdot 4^{5-1} \cdot 4^{b_3-1} &= (7+1)^{b_4} \\ \Leftrightarrow 2^{2b_3+8} &= 2^{3b_4} \\ \therefore b_3 &= 8\end{aligned}$$

である。

(答) $b_1 = 2, b_3 = 8$

(iii)

(ii)の結果より,

$$b_n = 3n - 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と推測できる。数学的帰納法を利用して, $n=1, 2, 3, \dots$ について①が成立することを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$b_1 = 2$$

より, このとき①は成立する。

[2] $n=k$ ($k \geq 2$) について①が成立するとき

このとき, (i)の結果と仮定より,

$$\begin{aligned}4^{b_1-1} \cdot 4^{b_2-1} \cdots 4^{b_k-1} &= (a_k + 1)^{b_{k+1}} \\ &= (2^k)^{b_{k+1}} \\ &= 2^{k(3k-1)}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}4^{b_1-1} \cdot 4^{b_2-1} \cdots 4^{b_k-1} \cdot 4^{b_{k+1}-1} &= (a_{k+1} + 1)^{b_{k+2}} \\ &= (2^{k+1})^{b_{k+2}} \\ &= 2^{(k+1)b_{k+2}}\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}2^{k(3k-1)} \cdot 4^{b_{k+1}-1} &= 2^{(k+1)b_{k+2}} \\ \Leftrightarrow 2^{k(3k-1)+2(b_{k+1}-1)} &= 2^{(k+1)b_{k+2}} \\ \Leftrightarrow k(3k-1)+2(b_{k+1}-1) &= (k+1)b_{k+2} \\ \Leftrightarrow (k-1)b_{k+1} &= (3k+2)(k-1) \\ \therefore b_{k+1} &= 3k+2 \quad (\because k \geq 2) \\ &= 3(k+1)-1\end{aligned}$$

となるので, $n=k+1$ のときも①は成立する。

以上, [1], [2]より, $n=1, 2, 3, \dots$ について①が成立する, すなわち, 数列 $\{b_n\}$ の一般項は,

$$3n - 1$$

であることが示された。

(証明終)

(3)

(i)

$$g(x) = (x-a)^2 - 3a - 1$$

より,

$$P(a, -3a-1)$$

である。よって a の値が変化するときの P の軌跡は, 直線

$$y = -3x - 1$$

となる。

(答) 頂点 P の座標 $(a, -3a-1)$

P の軌跡 直線 $y = -3x - 1$

(ii)

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの交点の x 座標は, 方程式

$$-x^2 + 4x - 3 = x^2 - 2ax + a^2 - 3a - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2(a+2)x + a^2 - 3a + 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

の解である。よって $\textcircled{1}$ が重解を持つとき, 2 つのグラフの共有点が 1 個となる。 $\textcircled{1}$ の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a+2)^2 - 2(a^2 - 3a + 2) \\ &= -a^2 + 10a \\ &= -a(a-10) \end{aligned}$$

となるので, 求める a の条件は

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \therefore a &= 0, 10 \end{aligned}$$

である。

(答) $a = 0, 10$

(iii)

$g_1(x)$ と $g_2(x)$ が入れ替わっても求める面積は不変なので, $a = 0, 10$ によって定まる $g(x)$ をそれぞれ $g_1(x)$, $g_2(x)$ とする。すなわち,

$$g_1(x) = x^2 - 1$$

$$g_2(x) = x^2 - 20x + 69$$

である。ここで, $y = f(x)$ と $y = g_1(x)$ のグラフの交点は,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = -x^2 + 4x - 3 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1)^2 = 0 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \\ &\therefore (x, y) = (1, 0) \end{aligned}$$

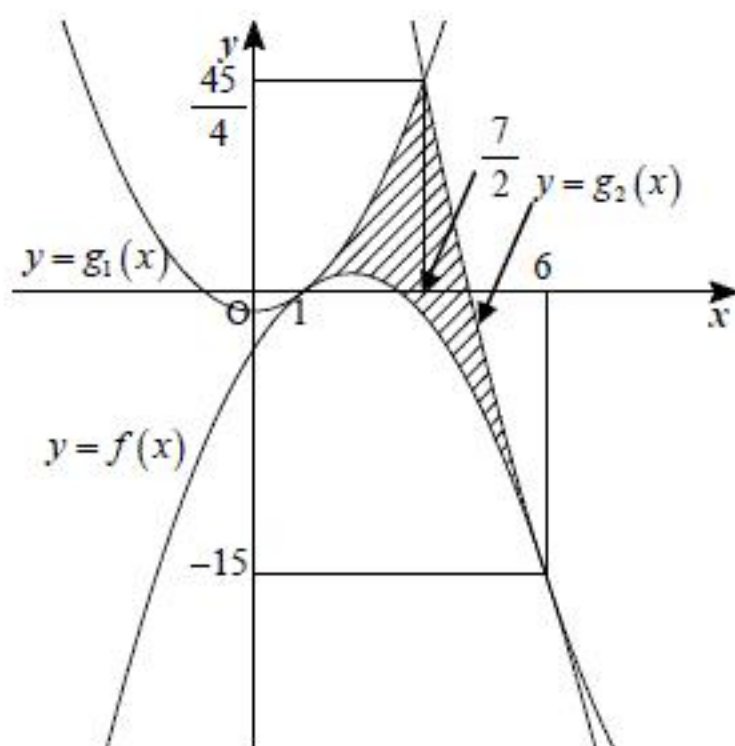
であり, $y = f(x)$ と $y = g_2(x)$ のグラフの交点は,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 \\ y = x^2 - 20x + 69 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 20x + 69 = -x^2 + 4x - 3 \\ y = x^2 - 20x + 69 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-6)^2 = 0 \\ y = x^2 - 20x + 69 \end{cases} \\ &\therefore (x, y) = (6, -15) \end{aligned}$$

であり, また $y = g_1(x)$ と $y = g_2(x)$ のグラフの交点は,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x^2 - 20x + 69 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 20x + 69 = x^2 - 1 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 20x = 70 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \\ &\therefore (x, y) = \left(\frac{7}{2}, \frac{45}{4}\right) \end{aligned}$$

である。よって $y = f(x)$, $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$ で囲まれた部分は次図の斜線部となる。



以上より, 求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\frac{7}{2}} \{(x^2 - 1) - (-x^2 + 4x - 3)\} dx + \int_{\frac{7}{2}}^6 \{(x^2 - 20x + 69) - (-x^2 + 4x - 3)\} dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 2x \right]_1^{\frac{7}{2}} + \left[\frac{2}{3}x^3 - 12x^2 + 72x \right]_{\frac{7}{2}}^6 \\ &= \frac{133}{12} - \frac{2}{3} + 144 - \frac{1603}{12} \\ &= \frac{125}{6} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{125}{6}$