

(1)

(i)

$f(x)=0$ の 2 解を α, β とおくと、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = m & \dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = \frac{m}{4} - 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

である。ここで、 α, β のうち少なくとも 1 つが整数のとき、 m は整数であるから、 $\textcircled{1}$ より

α, β はともに整数である。よって、 $\textcircled{2}$ より $\frac{m}{4}$ は整数である。すなわち、整数 n を用いて

$$m = 4n$$

とおける。このとき

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2n \pm \sqrt{4n^2 - n + 1}$$

という解を持つから、これが整数となるとき、

$$4n^2 - n + 1$$

が平方数となればよい

[1] $n > 0$ のとき

このとき

$$(2n-1)^2 < 4n^2 - n + 1 < (2n+1)^2$$

であるから

$$4n^2 - n + 1 = (2n)^2$$

$$\therefore n = 1$$

となる。よって

$$m = 4$$

となる。

[2] $n = 0$ のとき

このとき

$$4n^2 - n + 1 = 1^2$$

であるから

$$m = 0$$

となる。

[3] $n < 0$ のとき

このとき

$$\{-(2n+1)\}^2 < 4n^2 - n + 1 < \{-(2n-1)\}^2$$

であるから

$$4n^2 - n + 1 = (-2n)^2$$

$$\therefore n = 1$$

となるがこれは $n < 0$ に適さない。

以上 [1], [2], [3] より

$$m = 0, 4$$

となる。

(答) $m = 0, 4$

(ii)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - mx + \frac{m}{4} - 1 \\ &= \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + \frac{m}{4} - 1 \end{aligned}$$

となる。ここで $f(x)=0$ の 2 解をそれぞれ α, β ($\alpha > \beta$) とおく。 $y=f(x)$ は

$$x = \frac{m}{2}$$

について対称なので、「 $f(x) \leq 0$ となる整数 x がちょうど 4 個ある」ことは「 m が奇数で、 $3 \leq \alpha - \beta < 5$ となる」ことと同値である。

$$\alpha - \beta = \sqrt{m^2 - m + 4}$$

から

$$3 \leq \sqrt{m^2 - m + 4} < 5$$

$$\Leftrightarrow 9 \leq m^2 - m + 4 < 25$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq m(m-1) < 21$$

となるため、条件をみたす m の値は

$$m = \pm 3, 5$$

となる。

(答) $m = \pm 3, 5$

(2)

(i)

$$\overrightarrow{AQ} = (a, b, -3), \overrightarrow{AC} = (0, 2, -1)$$

であるので

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{CH}$$

から

$$\overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow k \overrightarrow{AQ} \cdot (k \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow ka \cdot ka + kb \cdot (kb - 2) - 3k \cdot (1 - 3k) = 0$$

$$\Leftrightarrow k \{ k(a^2 + b^2 + 9) - 3 - 2b \} = 0$$

$$\therefore k = \frac{2b+3}{a^2+b^2+9} \quad (\because k \neq 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{2b+3}{a^2+b^2+9}$$

(ii)

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} = (ka, kb - 2, 1 - 3k)$$

であるので

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}| &= \sqrt{(ka)^2 + (kb-2)^2 + (1-3k)^2} \\ &= \sqrt{5 + k^2(a^2 + b^2 + 9) - k(4b+6)} \\ &= \sqrt{5 - \frac{(2b+3)^2}{a^2+b^2+9}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{5 - \frac{(2b+3)^2}{a^2+b^2+9}}$$

(iii)

$|\overrightarrow{CH}|$ は直線 AQ と点 C との距離であるから、

$$|\overrightarrow{CP}| = 1$$

より

$$|\overrightarrow{CH}| \leq 1$$

となる。よって(ii)から

$$0 \leq 5 - \frac{(2b+3)^2}{a^2+b^2+9} \leq 1$$

となる。これを整理すると

$$0 \leq 5a^2 + (b-6)^2, \quad 4a^2 - 12b + 27 \leq 0$$

となる。よって

$$b \geq \frac{1}{3}a^2 + \frac{9}{4}$$

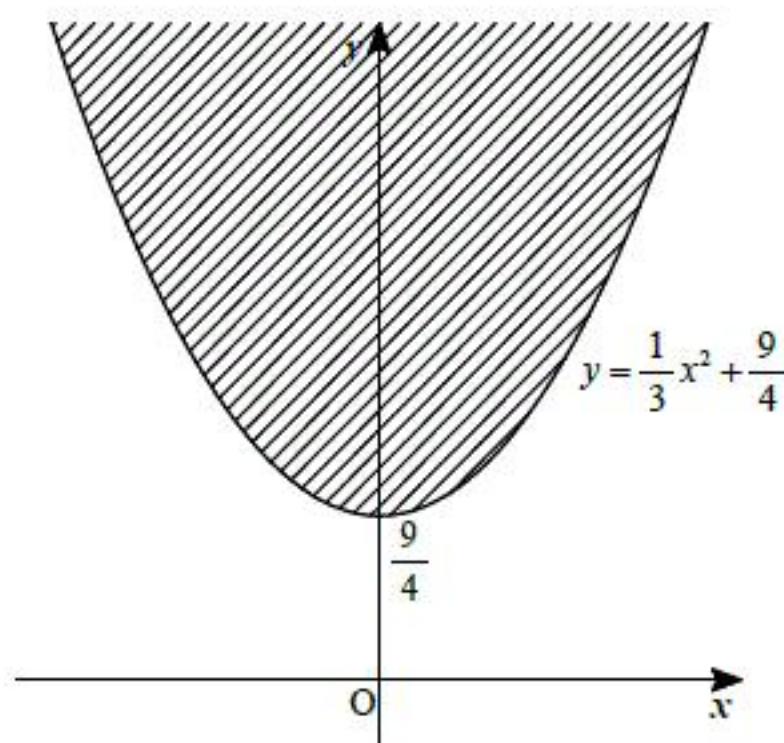
となる。よって点 Q の存在範囲は

$$y \geq \frac{1}{3}x^2 + \frac{9}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y \geq \frac{1}{3}x^2 + \frac{9}{4}$$

また、その領域は下図の斜線部分となる。(ただし境界線も含む。)



(答) 前図(ただし境界線も含む。)

(3)

A の得点が a 点, B の得点が b 点とする。状態を (a, b) と書くことにする。また, (a, b) となる

確率が $\frac{c}{2^{a+b}}$ のときの状態を $(a, b)_c$ と書くことにする。

(i)

このときの得点推移は以下のようになる。

$$\begin{array}{ccccccc} (0, 0) & \rightarrow & (1, 0) & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ (0, 1) & \rightarrow & (1, 1) & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ (0, 2) & \rightarrow & (1, 2) & \rightarrow & (2, 2) & \rightarrow & (3, 2) \rightarrow (4, 2) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & (1, 3) & \rightarrow & (2, 3) & \rightarrow & (3, 3) \rightarrow (4, 3) \end{array}$$

よって求める確率は

$${}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right\} = \frac{15}{128}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{15}{128}$$

(ii)

このときの得点推移は以下のようになる。

$$\begin{array}{ccccccc} (0, 0)_1 & \rightarrow & (1, 0)_1 & \rightarrow & (2, 0)_1 & \rightarrow & (3, 0)_1 \rightarrow (4, 0)_1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & (1, 1)_1 & \rightarrow & (2, 1)_2 & \rightarrow & (3, 1)_3 \rightarrow (4, 1)_3 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & (2, 2)_2 & \rightarrow & (3, 2)_5 \rightarrow (4, 2)_5 \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & (3, 3)_5 \rightarrow (4, 3)_5 \end{array}$$

よって, 求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{35}{128}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{35}{128}$$

(iii)

すべての場合の得点推移は以下のようになる。

$$\begin{array}{ccccccc} (0, 0)_1 & \rightarrow & (1, 0)_1 & \rightarrow & (2, 0)_1 & \rightarrow & (3, 0)_1 \rightarrow (4, 0)_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (0, 1)_1 & \rightarrow & (1, 1)_2 & \rightarrow & (2, 1)_3 & \rightarrow & (3, 1)_4 \rightarrow (4, 1)_4 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (0, 2)_1 & \rightarrow & (1, 2)_3 & \rightarrow & (2, 2)_6 & \rightarrow & (3, 2)_{10} \rightarrow (4, 2)_{10} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (0, 3)_1 & \rightarrow & (1, 3)_4 & \rightarrow & (2, 3)_{10} & \rightarrow & (3, 3)_{20} \rightarrow (4, 3)_{20} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (0, 4)_1 & & (1, 4)_4 & & (2, 4)_{10} & & (3, 4)_{10} \end{array}$$

よって硬貨を投げる回数の期待値は

$$\left\{ 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \cdot 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 10 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 20 \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \right\} \times 2 = \frac{93}{16}$$

となる。また、硬貨を 1 回投げる毎に A, B どちらかに 1 点入るので敗者の得点の期待値は

$$\frac{93}{16} - 4 = \frac{29}{16}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \text{硬貨を投げる回数の期待値} \frac{93}{16}, \text{敗者の得点の期待値} \frac{29}{16}$$

(4)

(i)

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 2}$$

から

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2 + 2x + 2) - x^2(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} \\ &= \frac{2x(x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} \end{aligned}$$

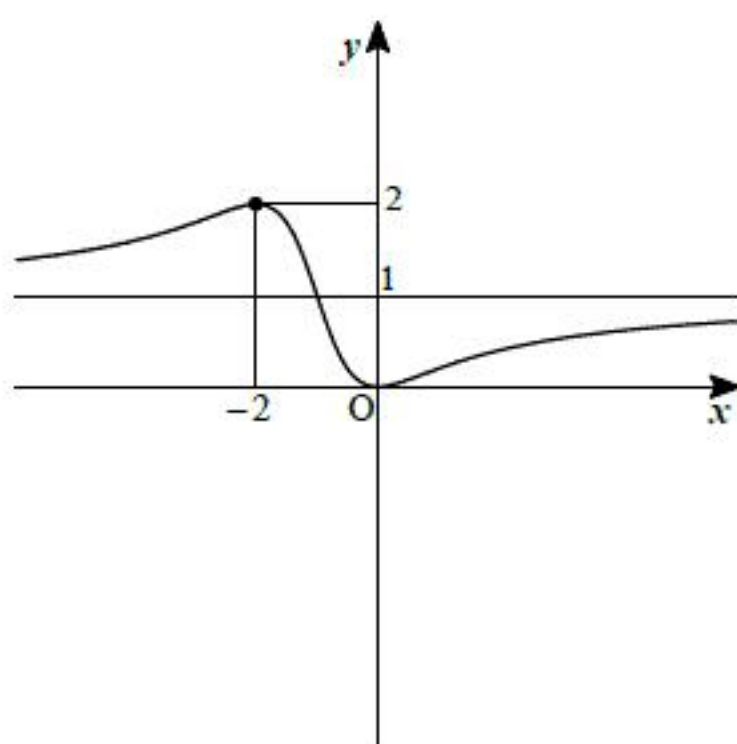
となる。よって関数 $f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$

となる。ここで

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$$

であるので関数 $f(x)$ のグラフは下図のようになる。



よって、上図より $y = f(x)$ が最大となるのは $x = -2$ のときであり、その値は 2 である。最小となるのは $x = 0$ のときであり、その値は 0 である。

(答) 最大値 2 ，最小値 0

(ii)

接点の座標を実数 t を用いて

$$\left(t, \frac{t^2}{t^2 + 2t + 2} \right)$$

とおく。このとき

$$f'(t) = -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t(t+2)}{(t^2 + 2t + 2)^2} = -2$$

$$\Leftrightarrow (t+1)^2(t^2 + 2t + 4) = 0$$

$$\therefore t = -1$$

となる。よって接点の座標は

$$(-1, 1)$$

となる。また、これを方程式 $y = -2x + a$ に代入することにより

$$a = -1$$

を得る。

(答) 接点の座標 $(-1, 1)$ ， $a = -1$

(iii)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 \left(1 - \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 2} \right) dx \\ &= \left[x - \log|x^2 + 2x + 2| \right]_{-1}^0 \\ &= 1 - \log 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $1 - \log 2$