

(1)

(i)

2項定理より

$$\begin{aligned}(x+2y)^4 &= \sum_{k=0}^4 {}_4C_k \cdot x^{4-k} \cdot (2y)^k \\&= x^4 + 4x^3 \cdot (2y) + 6x^2 \cdot (2y)^2 + 4x \cdot (2y)^3 + (2y)^4 \\&= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$$

(ii)

多項定理より

$$(x+2y+z)^7$$

の展開式の一般項は

$$\frac{7!}{p!q!r!} x^p \cdot (2y)^q \cdot z^r = \frac{7! \cdot 2^q}{p!q!r!} x^p y^q z^r$$

(ただし $p+q+r=7$, p, q, r は0以上の整数)

と表わされるので $x^2y^2z^3$ の係数は

$$\frac{7! \cdot 2^2}{2!2!3!} = 840$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 840$$

(iii)

2項定理より

$$(1+ax)^5 \left(x - \frac{2}{x} \right)^4$$

の展開式の一般項は

$$\left\{ {}_5C_k \cdot (ax)^k \right\} \left\{ {}_4C_l x^{4-l} \left(-\frac{2}{x} \right)^l \right\} = {}_5C_k \cdot {}_4C_l \cdot a^k \cdot (-2)^l \cdot x^{k+4-2l}$$

(ただし k は0以上5以下の整数, l は0以上4以下の整数)

と表わされる。

$$\begin{aligned}k+4-2l &= 4 \\ \Leftrightarrow k &= 2l\end{aligned}$$

より, x^4 の係数となるのは

$$(k, l) = (0, 0), (2, 1), (4, 2)$$

となるときであるので x^4 の係数の値は

$${}_5C_0 \cdot {}_4C_0 \cdot a^0 \cdot (-2)^0 + {}_5C_2 \cdot {}_4C_1 \cdot a^2 \cdot (-2)^1 + {}_5C_4 \cdot {}_4C_2 \cdot a^4 \cdot (-2)^2 = 1 - 80a^2 + 120a^4$$

となる。これが41に等しいとき,

$$\begin{aligned}1 - 80a^2 + 120a^4 &= 41 \\ \Leftrightarrow 3a^4 - 2a^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^2 - 1)(3a^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 1 &= 0 \\ \therefore a &= \pm 1\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \pm 1$$

(別解)

二項定理より,

$$\begin{aligned}(1+ax)^5 &= {}_5C_0 + {}_5C_1 ax + {}_5C_2 (ax)^2 + {}_5C_3 (ax)^3 + {}_5C_4 (ax)^4 + {}_5C_5 (ax)^5 \\&= a^5 x^5 + 5a^4 x^4 + 10a^3 x^3 + 10a^2 x^2 + 5ax + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{2}{x} \right)^4 &= {}_4C_0 x^4 + {}_4C_1 x^3 \left(-\frac{2}{x} \right) + {}_4C_2 x^2 \left(-\frac{2}{x} \right)^2 + {}_4C_3 x \left(-\frac{2}{x} \right)^3 + {}_4C_4 \left(-\frac{2}{x} \right)^4 \\&= x^4 - 8x^2 + 24 - \frac{32}{x^2} + \frac{16}{x^4}\end{aligned}$$

であるから, $(1+ax)^5 \left(x - \frac{2}{x} \right)^4$ の展開式における x^4 の係数は,

$$1 \cdot 1 + 10a^2 \cdot (-8) + 5a^4 \cdot 24 = 1 - 80a^2 + 120a^4$$

となる。これが41に等しいとき,

$$\begin{aligned}1 - 80a^2 + 120a^4 &= 41 \\ \Leftrightarrow 3a^4 - 2a^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^2 - 1)(3a^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 1 &= 0 \\ \therefore a &= \pm 1\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \pm 1$$

(2)

(i)

$$\begin{aligned}\cos 4x &= 2\cos^2 2x - 1 \\ &= 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 \\ &= 2(2t^2 - 1)^2 - 1 \\ &= 8t^4 - 8t^2 + 1\end{aligned}$$

となる。

(答) $8t^4 - 8t^2 + 1$

(ii)

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos x + 2\sin x \\ &= \sqrt{5} \sin(x + \alpha)\end{aligned}$$

(ただし, α は $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ をみたす第一象限の角とする)

となる。ここで,

$$\sin \alpha < \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$$

であるため, $f(x)$ が最小となるのは $x=0$ のときであり, その値は

$$\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 1$$

となる。また, 最大値は $x + \alpha = \frac{\pi}{2}$ のときであり, その値は

$$\sqrt{5} \cdot 1 = \sqrt{5}$$

となる。

(答) 最大値 $\sqrt{5}$, 最小値 1

(iii)

(ii)より

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\sin 2\theta - \cos 4\theta &= \sin(\pi - 2\alpha) - \cos(2\pi - 4\alpha) \\ &= \sin 2\alpha - \cos 4\alpha \\ &= 2\sin \alpha \cos \alpha - (8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \left(8 \cdot \frac{16}{25} - 8 \cdot \frac{4}{5} + 1\right) \\ &= \frac{27}{25}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{27}{25}$

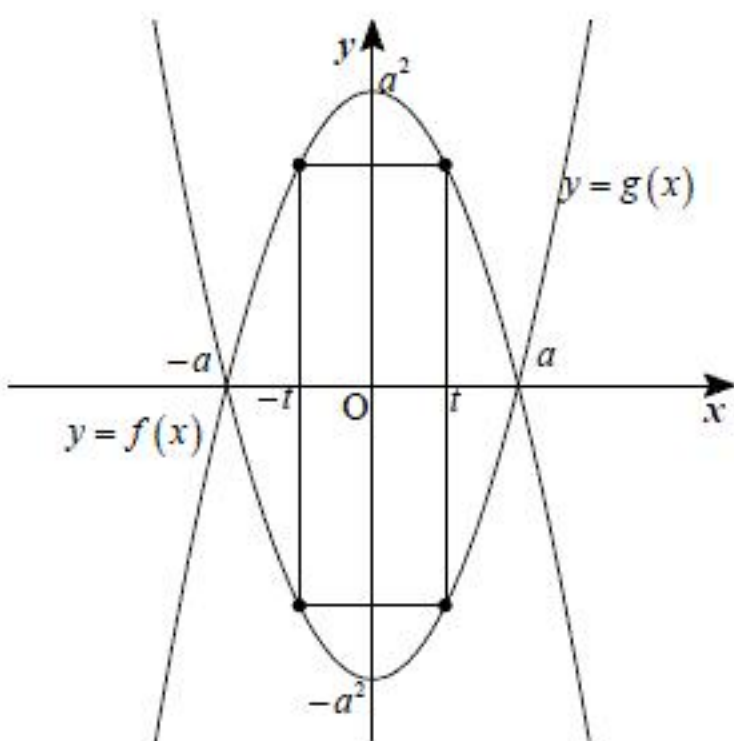
(3)

(i)

$r=1$ のとき

$$\begin{cases} f(x)=a^2-x^2 \\ g(x)=x^2-a^2 \end{cases}$$

より、グラフは下図のようになる。



よって、 I の面積は、このグラフが x 軸に関して対称であることに注意すると

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx - 2 \cdot 2t(a^2 - t^2) &= 2 \cdot \frac{1}{6} \{a - (-a)\}^3 - 4t(a^2 - t^2) \\ &= \frac{8}{3}a^3 - 4t(a^2 - t^2) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8}{3}a^3 - 4t(a^2 - t^2)$

(ii)

$$\begin{cases} (t, g(t)) = (t, -f(t)) \\ (-t, f(-t)) = (-t, f(t)) \\ (-t, g(-t)) = (-t, -f(t)) \end{cases}$$

であるので、 H の面積は、

$$2t \cdot 2f(t) = 4t(a^2 - t^2)^r$$

となる。ここで、

$$h(t) = 4t(a^2 - t^2)^r$$

とおくと、

$$\begin{aligned} h'(t) &= 4(a^2 - t^2)^r + 4tr(a^2 - t^2)^{r-1} \cdot (-2t) \\ &= 4(a^2 - t^2)^{r-1} \{a^2 - (1+2r)t^2\} \end{aligned}$$

となる。 $r > 0$ より、

$$0 < \frac{a}{\sqrt{1+2r}} < a$$

であることに注意すると、関数 $h(t) = 4t(a^2 - t^2)^r$ の増減表は下図のようになる。

t	0	...	$\frac{a}{\sqrt{1+2r}}$	...	a
$h'(t)$	$\times$	+	0	-	$\times$
$h(t)$	$\times$	$\nearrow$		$\searrow$	$\times$

よって、 $h(t)$ が最大となるときの t は

$$t = \frac{a}{\sqrt{1+2r}}$$

となる。

(答) $t = \frac{a}{\sqrt{1+2r}}$

(iii)

(ii)から

$$\begin{aligned} a^2 &= 2t^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{2a^2}{1+2r} \\ \therefore r &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \\ g(x) = -\sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$$

となる。このとき、 G は半径 a の円となる。よって、 I の面積は

$$\begin{aligned} \pi a^2 - 4t(a^2 - t^2)^{\frac{1}{2}} &= \pi a^2 - 2\sqrt{2}a \left(a^2 - \frac{1}{2}a^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\pi - 2)a^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $(\pi - 2)a^2$