

(1)

(i)

$$a_3 = -a_2 + 6a_1 = 3$$

$$a_4 = -a_3 + 6a_2 = 15$$

$$(\text{答}) \quad a_3 = 3, a_4 = 15$$

(ii)

与式を整理すると,

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

であり,

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 0$$

と比較することで,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha\beta = -6 \end{cases}$$

となる。したがって、解と係数の関係より

α, β は二次方程式 $x^2 + x - 6 = 0$ の2解である。 $\alpha < \beta$ であることから,

$$\alpha = -3, \beta = 2$$

$$(\text{答}) \quad \alpha = -3, \beta = 2$$

(iii)

$$b_n = a_{n+1} + 3a_n$$

より

$$b_1 = a_2 + 3a_1 = 6$$

また与式は,

$$b_{n+1} = 2b_n$$

となるので、 $\{b_n\}$ は初項 6、公比 2 の等比数列となる。

したがって,

$$b_n = 6 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n$$

$$(\text{答}) \quad b_n = 3 \cdot 2^n$$

(iv)

$$c_n = a_{n+1} - 2a_n$$

より

$$c_1 = a_2 - 2a_1 = 1$$

また、与式は次のように変形できる。

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = -3(a_{n+1} - 2a_n)$$

つまり

$$c_{n+1} = -3c_n$$

よって、 $\{c_n\}$ は初項 1、公比 -3 の等比数列になるため、

$$c_n = (-3)^{n-1}$$

$$(\text{答}) \quad c_n = (-3)^{n-1}$$

(v)

(iii), (iv)の結果を用いて、 $b_n - c_n$ を考えると、

$$5a_n = 3 \cdot 2^n - (-3)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{3 \cdot 2^n - (-3)^{n-1}}{5}$$

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{3 \cdot 2^n - (-3)^{n-1}}{5}$$

(2)

(i)

$\angle AOB = \theta$ とおくと、余弦定理より

$$\begin{aligned} AB^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

であることから、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - AB^2}{2} = \frac{21}{2}$$

$$(\text{答}) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{21}{2}$$

(ii)

辺 AB の中点を M とおくと、 G は線分 OM を $2:1$ に内分する点なので、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$$

(iii)

OC は $\angle AOB$ の二等分線より、

$$AC : CB = OA : OB = 4 : 3$$

よって

$$\overrightarrow{OC} = \frac{3}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{OB} = \frac{3}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b}$$

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OC} = \frac{3}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b}$$

(iv)

実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OI} = k\overrightarrow{OC}$$

と表せるので、

$$\overrightarrow{OI} = \frac{3}{7}k\vec{a} + \frac{4}{7}k\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

また $\angle OAB$ の二等分線と OB との交点を D とおくと、

$$OD : BD = OA : AB = 2 : 1$$

よって

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}$$

I は AD 上にあるので、実数 m を用いて

$$\overrightarrow{AI} = m\overrightarrow{AD}$$

と表せ、

$$\overrightarrow{OI} = (1-m)\vec{a} + \frac{2}{3}m\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

$\vec{a}, \vec{b}$ は互いに一次独立なので、①、②を係数比較すると

$$\begin{cases} \frac{3}{7}k = 1-m \\ \frac{4}{7}k = \frac{2}{3}m \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと

$$k = \frac{7}{9}, m = \frac{2}{3}$$

これを①に代入して、

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}$$

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}$$

(3)

(i)

$y=x^2$ を x で微分すると $y'=2x$ なので、 $x=a$ における接線の傾きは $2a$ したがって、求める接線の方程式は、

$$\begin{aligned} l: y &= 2a(x-a) + a^2 \\ &= 2ax - a^2 \end{aligned}$$

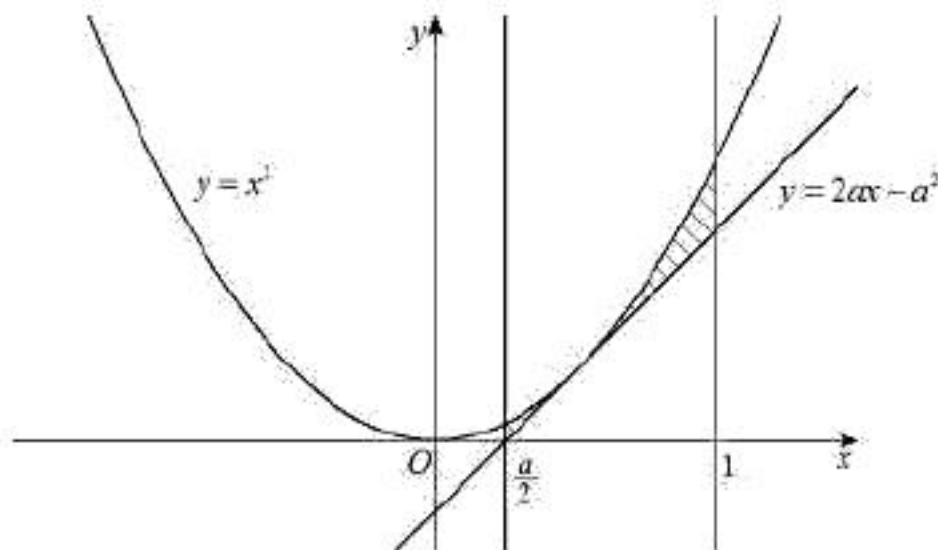
また、 x 軸との交点の y 座標は 0 なので、 $a \neq 0$ であることを用いて、

$$0 = 2ax - a^2$$

$$x = \frac{a}{2}$$

(答) 接線 $l: y = 2ax - a^2$, x 軸との交点の座標 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$

(ii)



求めるのは図斜線部の面積なので、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{a}{2}}^1 \{x^2 - (2ax - a^2)\} dx \\ &= \int_{\frac{a}{2}}^1 (x-a)^2 dx \\ &= \left[\frac{(x-a)^3}{3} \right]_{\frac{a}{2}}^1 \\ &= -\frac{7}{24}a^3 + a^2 - a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad S = -\frac{7}{24}a^3 + a^2 - a + \frac{1}{3}$$

(iii)

(ii) で求めた S を a の関数と考え、 a で微分すると

$$S'(a) = -\frac{7}{8}a^2 + 2a - 1$$

$0 \leq a \leq 1$ における $S'(a) = 0$ の解は

$$a = \frac{8-2\sqrt{2}}{7}$$

したがって、 S の増減表は次のようになる。

a	0	...	$\frac{8-2\sqrt{2}}{7}$	...	1
S'	-	-	0	+	+
S	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{9-4\sqrt{2}}{147}$	$\nearrow$	$\frac{1}{24}$

増減表より、求める最小値は

$$S = \frac{9-4\sqrt{2}}{147}$$

$$(答) \quad S = \frac{9-4\sqrt{2}}{147}$$