

(1)

(i)
 $\triangle ABC$ の重心を G とする。 $\angle AGP = \theta$ とおくと、

$$\begin{aligned}s &= \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PC} \\ &= (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GP}) \cdot (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GP}) + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GP}) \cdot (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GP}) + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GP}) \cdot (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GP})\end{aligned}$$

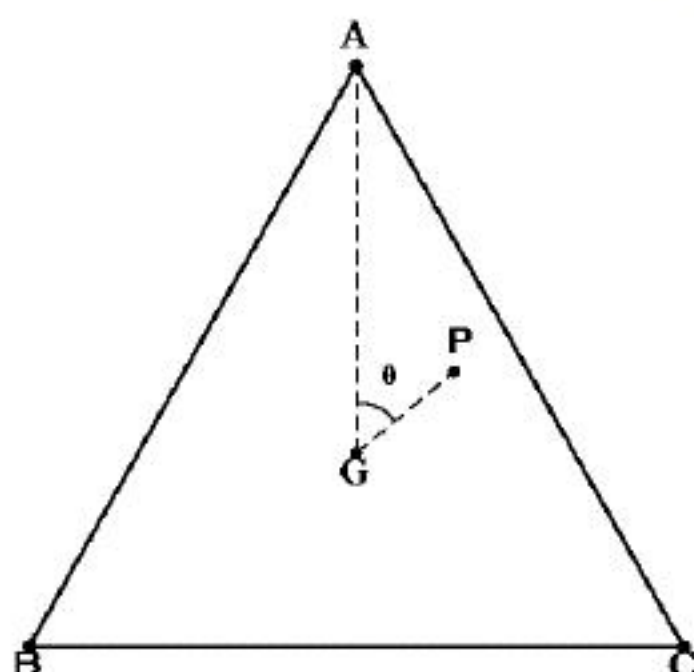
ここで、 $|\overrightarrow{GA}|^2 = |\overrightarrow{GB}|^2 = |\overrightarrow{GC}|^2 = r^2$, $\overrightarrow{GP} = \vec{p}$ より、

$$= 3|\vec{p}|^2 + 3r^2 - 2|\vec{p}|r \left(\cos \theta + \cos \left(\frac{2}{3}\pi + \theta \right) + \cos \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right) \right)$$

三角関数の和積公式を用いると

$$\cos \left(\frac{2}{3}\pi + \theta \right) + \cos \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right) = 2 \cos \frac{2}{3}\pi \cdot \cos \theta = -\cos \theta \text{ より、}$$

$$s = 3|\vec{p}|^2 + 3r^2 \qquad \qquad \qquad \text{(答) } s = 3|\vec{p}|^2 + 3r^2$$



(ii)
 $t = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$

$$= (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GP}) \cdot (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GP}) + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GP}) \cdot (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GP}) + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GP}) \cdot (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GP})$$

ここで、 $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = r^2 \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}r^2$

(i)と同様に展開して整理すると、

$$\begin{aligned}t &= 3 \times \left(-\frac{1}{2}r^2 \right) + 3|\vec{p}|^2 - 2|\vec{p}|r \left(\cos \theta + \cos \left(\frac{2}{3}\pi + \theta \right) + \cos \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right) \right) \\ &= -\frac{3}{2}r^2 + 3|\vec{p}|^2 \qquad \qquad \qquad \text{(答) } t = -\frac{3}{2}r^2 + 3|\vec{p}|^2\end{aligned}$$

(iii)
 $s \geq \frac{15}{4}r^2$ より

$$3|\vec{p}|^2 + 3r^2 \geq \frac{15}{4}r^2$$

$$\therefore \frac{1}{4}r^2 \leq |\vec{p}|^2$$

$r > 0$ なので、

$$\therefore \frac{r}{2} \leq |\vec{p}|$$

一方、 $t \leq \frac{3}{2}r^2$ より

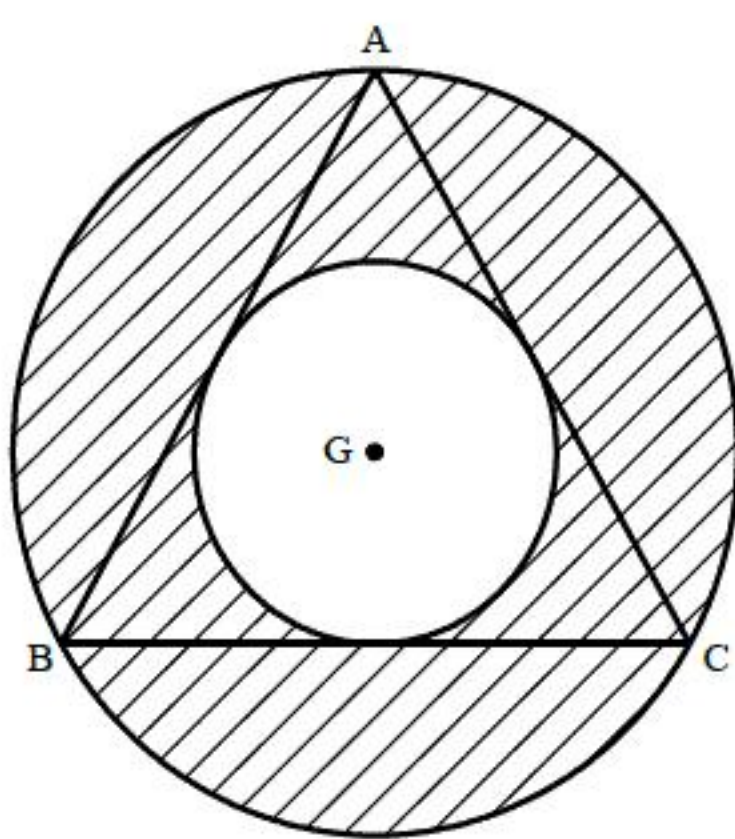
$$\therefore -\frac{3}{2}r^2 + 3|\vec{p}|^2 \leq \frac{3}{2}r^2$$

$$\therefore |\vec{p}| \leq r$$

合わせて、

$$\frac{r}{2} \leq |\vec{p}| \leq r$$

$\triangle ABC$ の内接円の半径が $\frac{r}{2}$ であることに注意すると、 P が描く領域は以下のようなになる。
ただし、境界上の点を含む。



…(答)

(2)

(i)

$$\begin{cases} s = x + y \\ t = xy \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

より、 x, y は X の 2 次方程式

$$X^2 - sX + t = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

の 2 実数解となる。

したがって②の判別式を D とすると、

$$D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 - 4t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t \leq \frac{1}{4}s^2$$

である。また①より

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

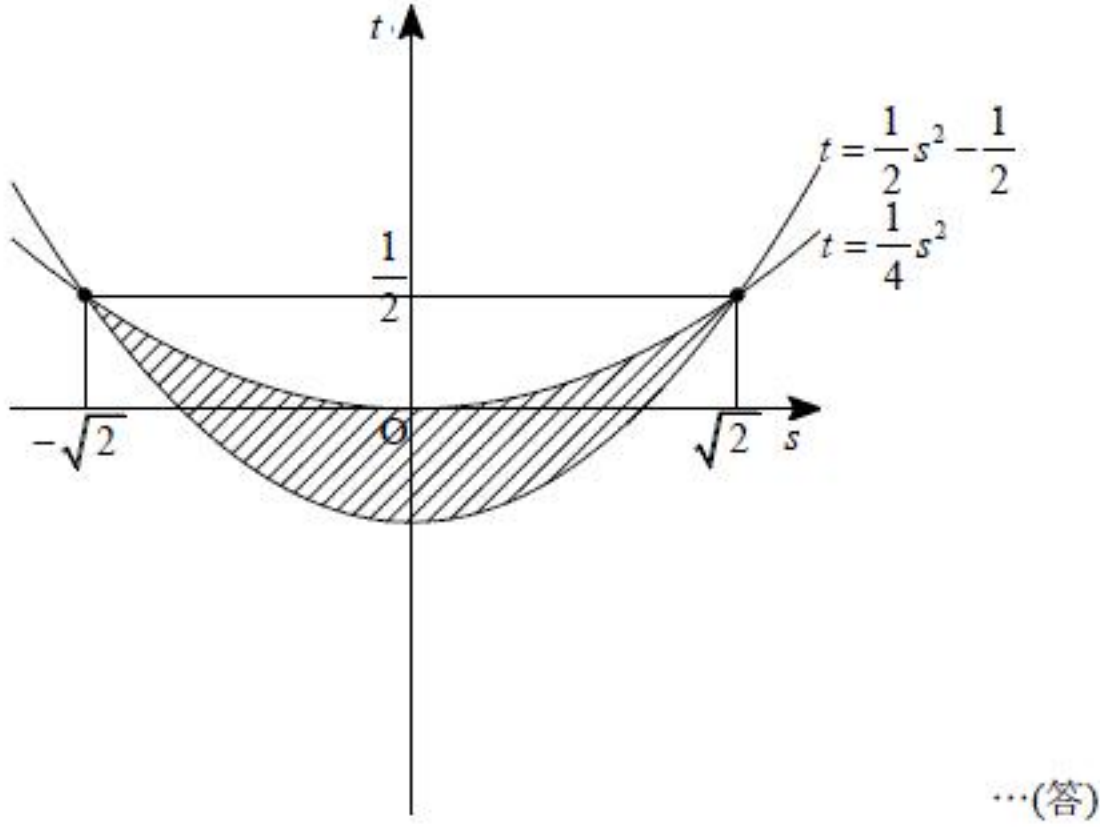
$$\Leftrightarrow s^2 - 2t \leq 1$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}$$

である。以上より

$$\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{4}s^2$$

これを図示すると次のようになる。



(ii)

$$z = (a - x)(a - y) \text{ とおくと、}$$

$$z = a^2 - a(x + y) + xy$$

$$\therefore z = a^2 - as + t$$

s を固定して考えると、 (i)の図より $t = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}$ のとき z は最小となる。

したがって

$$z = a^2 - as + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(s - a)^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}$$

だから

ア) $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ のとき、 z は $s = a$ で最小となりその最小値は $\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}$

イ) $\sqrt{2} \leq a$ のとき、 z は $s = \sqrt{2}$ で最小となりその最小値は $a^2 - \sqrt{2}a + \frac{1}{2}$

以上より

(答) $\begin{cases} \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} & (0 \leq a \leq \sqrt{2}) \\ a^2 - \sqrt{2}a + \frac{1}{2} & (\sqrt{2} \leq a) \end{cases}$

(iii)

b は、 $0, 1, 2, 3$ のうちのいずれかである。

$b = 0$ となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ であり、このとき、

$$M = \frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$b = 1$ となる確率は $3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$ であり、このとき、

$$M = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2}$$

$$= 0$$

$b = 2$ となる確率は $3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$ であり、このとき、

$$M = 2^2 - 2\sqrt{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{9}{2} - 2\sqrt{2}$$

$b = 3$ となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ であり、このとき、

$$M = 3^2 - 3\sqrt{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{19}{2} - 3\sqrt{2}$$

よって M の期待値は

$$-\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{3}{8} + \left(\frac{9}{2} - 2\sqrt{2}\right) \times \frac{3}{8} + \left(\frac{19}{2} - 3\sqrt{2}\right) \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{45}{16} - \frac{9\sqrt{2}}{8}$$

(答) $\frac{45}{16} - \frac{9\sqrt{2}}{8}$

(3)

(i) $a_1 = \frac{1}{3}, a_{2n} = \frac{2}{3} a_{2n-1}, a_{2n+1} = \frac{1}{3} a_{2n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

$$a_{2n+1} = \frac{1}{3} a_{2n} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3} a_{2n-1} \right) = \frac{2}{9} a_{2n-1}$$

が成り立つので、数列 $\{a_{2n-1}\}$ は初項 $\frac{1}{3}$ 、公比 $\frac{2}{9}$ なので

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{3}{7} \qquad \text{(答)} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{3}{7}$$

(ii)

(i)より数列 $\{a_{2n-1}\}$ は初項 $\frac{1}{3}$ 、公比 $\frac{2}{9}$ より

$$a_{2n-1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{9} \right)^{k-1}$$

と書ける。

$$\begin{aligned} T_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} k a_k = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \dots + (2n-1) \cdot a_{2n-1} + 2n \cdot a_{2n} \\ &= \sum_{k=1}^n (2k-1) \cdot a_{2k-1} + \sum_{k=1}^n 2k \cdot a_{2k} \end{aligned}$$

$a_{2n} = \frac{2}{3} a_{2n-1}$ を用いると

$$\begin{aligned} T_{2n} &= \sum_{k=1}^n (2k-1) \cdot a_{2k-1} + \sum_{k=1}^n 2k \cdot \frac{2}{3} a_{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{10}{3} k - 1 \right) \cdot a_{2k-1} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{10}{9} k - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{2}{9} \right)^{k-1} \end{aligned}$$

となる。ここで $S_n = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{2}{9} \right)^{k-1}$ とおくと、 $S_n - \frac{2}{9} S_n$ を考えると

$$\begin{aligned} S_n &= 1 \cdot \left(\frac{2}{9} \right)^0 + 2 \cdot \left(\frac{2}{9} \right)^1 + 3 \cdot \left(\frac{2}{9} \right)^2 + \dots + n \cdot \left(\frac{2}{9} \right)^{n-1} \\ \frac{2}{9} S_n &= \qquad + 1 \cdot \left(\frac{2}{9} \right)^1 + 2 \cdot \left(\frac{2}{9} \right)^2 + \dots + (n-1) \cdot \left(\frac{2}{9} \right)^{n-1} + n \cdot \left(\frac{2}{9} \right)^n \end{aligned}$$

よって両辺を引くと

$$\begin{aligned} \frac{7}{9} S_n &= \left(\frac{2}{9} \right)^0 + \left(\frac{2}{9} \right)^1 + \left(\frac{2}{9} \right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{9} \right)^{n-1} - n \cdot \left(\frac{2}{9} \right)^n \\ \therefore S_n &= \frac{9}{7} \left\{ \left(\frac{2}{9} \right)^0 + \left(\frac{2}{9} \right)^1 + \left(\frac{2}{9} \right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{9} \right)^{n-1} \right\} - \frac{9}{7} n \cdot \left(\frac{2}{9} \right)^n \end{aligned}$$

$-1 < r < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} m r^n = 0$ が成り立つので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{9}} - \frac{9}{7} \cdot 0 = \frac{81}{49}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T_{2n} &= \frac{10}{9} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{9} \right)^{k-1} \\ &= \frac{10}{9} \cdot \frac{81}{49} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{69}{49} \qquad \text{(答)} \lim_{n \rightarrow \infty} T_{2n} = \frac{69}{49} \end{aligned}$$

(4)

(i) 与式より

$$\begin{aligned}-\sin x + \alpha x &= \int_0^x (t-x)g(t)dt \\ &= \int_0^x t g(t)dt - x \int_0^x g(t)dt\end{aligned}$$

両辺を x で微分して,

$$\begin{aligned}-\cos x + \alpha &= x g(x) - \int_0^x g(t)dt - x g(x) \\ &= -\int_0^x g(t)dt\end{aligned}\tag{①}$$

さらに両辺を x で微分して,

$$g(x) = -\sin x$$

また①に $x=0$ を代入すると

$$\alpha = 1 \qquad \qquad \qquad (\text{答}) \quad g(x) = -\sin x, \alpha = 1$$

(ii)

$0 < x \leq \pi$ のとき $h(x) = e^{-x} \sin x$ なので

$$\begin{aligned}h'(x) &= -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x \\ &= \sqrt{2} e^{-x} \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)\end{aligned}$$

一方, $\pi < x < 2\pi$ のとき $h(x) = -e^{-x} \sin x$ なので

$$\begin{aligned}h'(x) &= e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x \\ &= \sqrt{2} e^{-x} \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\end{aligned}$$

となる。以上より増減表は

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π		$\frac{5}{4}\pi$		2π
$h'(x)$		+	0	−		+	0	−	
$h(x)$	0	↗	極大値	↘	極小値	↗	極大値	↘	0

となる。よって, 増減表より極値は

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} \quad (\text{極大値})$$

$$h(\pi) = 0 \quad (\text{極小値})$$

$$h\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5}{4}\pi} \quad (\text{極大値}) \qquad \qquad \qquad (\text{答}) \quad \text{極小値} : 0, \text{極大値} : \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5}{4}\pi}$$

(iii)

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left\{e^{-x}(\sin x + \cos x)\right\} \\ &= -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x - e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x \\ &= -2e^{-x} \sin x\end{aligned}\qquad \qquad \qquad (\text{答}) \quad -2e^{-x} \sin x$$

(iv)

$(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$ のとき $\sin x \leq 0$ より $h(x) = -e^{-x} \sin x$ である。

(iii)の答えを利用して

$$\begin{aligned}I_k &= \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} h(x) dx = \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} -e^{-x} \sin x dx \\ &= \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \right]_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \\ &= \frac{1}{2} (e^{-2k\pi} + e^{-(2k-1)\pi}) \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{\pi}) (e^{-2\pi})^k\end{aligned}$$

となる。

これは初項 $\frac{1}{2} e^{-2\pi} (1 + e^{\pi})$, 公比 $e^{-2\pi}$ の等比数列なのでその無限級数の和は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n I_k = \frac{e^{-2\pi} (1 + e^{\pi})}{2(1 - e^{-2\pi})} = \frac{(1 + e^{\pi})}{2(e^{\pi} + 1)(e^{\pi} - 1)} = \frac{1}{2(e^{\pi} - 1)}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n I_k = \frac{1}{2(e^{\pi} - 1)}$$