

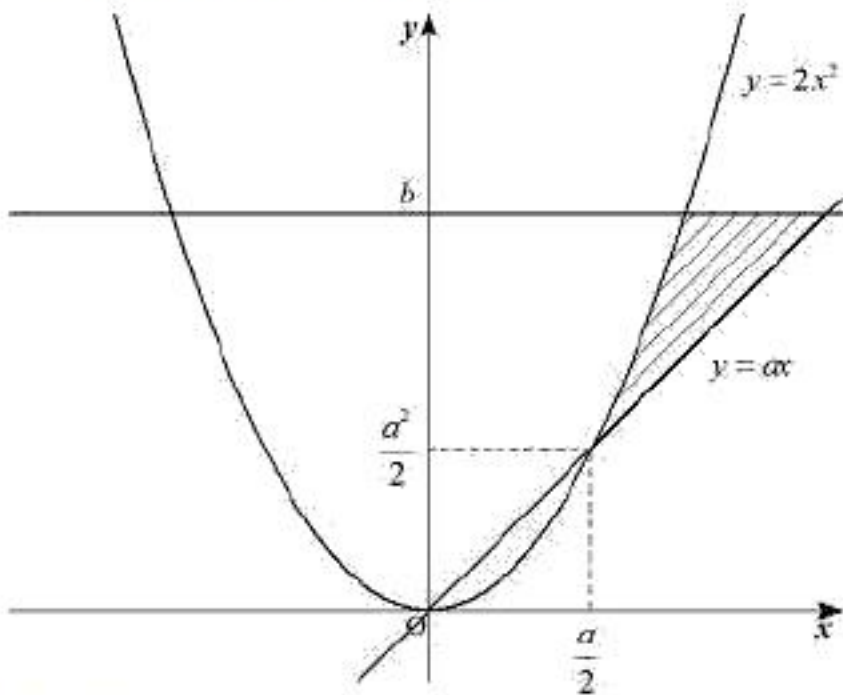
(1)

(i)

$y = 2x^2$ と $y = ax$ を連立して解くと、

$$(x, y) = (0, 0), \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2} \right)$$

$b > \frac{a^2}{2}$ より、求めるのは次図斜線部の面積である。



y 軸方向の積分を考えると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{a^2}{2}}^b \left(\frac{y}{a} - \sqrt{\frac{y}{2}} \right) dy \\ &= \left[\frac{y^2}{2a} - \frac{\sqrt{2}}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{a^2}{2}}^b \\ &= \frac{b^2}{2a} - \frac{\sqrt{2}}{3} b^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{24} a^3 \end{aligned}$$

(答) $S = \frac{b^2}{2a} - \frac{\sqrt{2}}{3} b^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{24} a^3$

(ii)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{a^2}{2}}^b \left\{ \left(\frac{y}{a} \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{y}{2}} \right)^2 \right\} dy \\ &= \pi \left[\frac{y^3}{3a^2} - \frac{y^2}{4} \right]_{\frac{a^2}{2}}^b \\ &= \pi \left(\frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^4}{48} \right) \end{aligned}$$

(答) $V = \pi \left(\frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^4}{48} \right)$

(iii)

$a = b$ のとき

$$V = \pi \left(\frac{a^4}{48} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{3} \right)$$

この右辺を $f(a)$ とおくと、

$$f'(a) = \pi \left(\frac{a^3}{12} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{12} (a-2)(a^2+2a-2)$$

また、

$$b = a > \frac{a^2}{2}$$

より、

$$0 < a < 2$$

なので、この範囲における $f'(a) = 0$ の解は

$$a = -1 + \sqrt{3}$$

よって、 $f(a)$ の増減表は次のようになる。

a	0	...	$-1 + \sqrt{3}$	...	2
$f'(a)$	$\times$	+	0	-	$\times$
$f(a)$	$\times$	$\nearrow$	$\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} \right)$	$\searrow$	$\times$

増減表より、 $a = -1 + \sqrt{3}$ で極大値 $\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} \right)$ をとる。

(答) $a = -1 + \sqrt{3}$ で、極大値 $\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} \right)$

(2)

(i)

実数 k, m を用いて

$$AE : ED = k : 1 - k, \quad CE : EB = m : 1 - m$$

とおくと,

$$\overrightarrow{OE} = (1 - k)\vec{a} + \frac{2}{3}k\vec{b} = (1 - m)\alpha\vec{a} + m\vec{b}$$

と表せる。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は互いに一次独立なので,

$$\begin{cases} 1 - k = (1 - m)\alpha \\ \frac{2}{3}k = m \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと,

$$k = \frac{3(1 - \alpha)}{3 - 2\alpha}, \quad m = \frac{2(1 - \alpha)}{3 - 2\alpha}$$

であることから,

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\alpha}{3 - 2\alpha}\vec{a} + \frac{2 - 2\alpha}{3 - 2\alpha}\vec{b}$$

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OE} = \frac{\alpha}{3 - 2\alpha}\vec{a} + \frac{2 - 2\alpha}{3 - 2\alpha}\vec{b}$$

(ii)

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3 - 2\alpha} \right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{2 - 2\alpha}{3 - 2\alpha} \right)\vec{b} \\ &= \frac{3 - 4\alpha}{6 - 4\alpha}\vec{a} - \frac{1 - 2\alpha}{6 - 4\alpha}\vec{b} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{EF} = \frac{3 - 4\alpha}{6 - 4\alpha}\vec{a} - \frac{1 - 2\alpha}{6 - 4\alpha}\vec{b}$$

(iii)

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交するので, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ が成り立つ。これと $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ を用いると,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{EF}|^2 &= |\vec{a}|^2 \left\{ \left(\frac{3 - 4\alpha}{6 - 4\alpha} \right)^2 + \left(\frac{1 - 2\alpha}{6 - 4\alpha} \right)^2 \right\} \\ &= |\vec{a}|^2 \cdot \frac{10\alpha^2 - 14\alpha + 5}{2(3 - 2\alpha)^2} \end{aligned}$$

したがって

$$f(\alpha) = \frac{10\alpha^2 - 14\alpha + 5}{2(3 - 2\alpha)^2}$$

とおくと, $|\overrightarrow{EF}|$ を最小にする α は $f(\alpha)$ を最小にする α に等しい。

$f(\alpha)$ を α で微分すると,

$$f'(\alpha) = \frac{16\alpha - 11}{(3 - 2\alpha)^3}$$

より, $f(\alpha)$ の増減表は次のようになる。

α	0	...	$\frac{11}{16}$	...	1
$f'(\alpha)$	$\times$	$-$	0	$+$	$\times$
$f(\alpha)$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$	$\times$

したがって, $|\overrightarrow{EF}|$ を最小にする α は,

$$\alpha = \frac{11}{16}$$

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{11}{16}$$

(3)

(i)

$$\begin{aligned}a_3 &= -a_2 + 6a_1 = 3 \\ a_4 &= -a_3 + 6a_2 = 15\end{aligned}$$

(答) $a_3 = 3, a_4 = 15$

(ii)

与式を整理すると,

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

であり,

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 0$$

と比較することで,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha\beta = -6 \end{cases}$$

となる。したがって, 解と係数の関係より

α, β は二次方程式 $x^2 + x - 6 = 0$ の2解である。 $\alpha < \beta$ であることから,

$$\alpha = -3, \beta = 2$$

(答) $\alpha = -3, \beta = 2$

(iii)

$$b_n = a_{n+1} + 3a_n$$

より

$$b_1 = a_2 + 3a_1 = 6$$

また与式は,

$$b_{n+1} = 2b_n$$

となるので, $\{b_n\}$ は初項 6, 公比 2 の等比数列となる。

したがって,

$$b_n = 6 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n$$

(答) $b_n = 3 \cdot 2^n$

(iv)

$$c_n = a_{n+1} - 2a_n$$

より

$$c_1 = a_2 - 2a_1 = 1$$

また, 与式は次のように変形できる。

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = -3(a_{n+1} - 2a_n)$$

つまり

$$c_{n+1} = -3c_n$$

よって, $\{c_n\}$ は初項 1, 公比 -3 の等比数列になるため,

$$c_n = (-3)^{n-1}$$

(答) $c_n = (-3)^{n-1}$

(v)

(iii), (iv)の結果を用いて, $b_n - c_n$ を考えると,

$$5a_n = 3 \cdot 2^n - (-3)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{3 \cdot 2^n - (-3)^{n-1}}{5}$$

(答) $a_n = \frac{3 \cdot 2^n - (-3)^{n-1}}{5}$