

B

平成 21 年度個別学力検査問題(医学部)

数 学

前 期 日 程

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は、2 ページあり、問題は(1)から(4)まで4 題あります。解答用紙は4 枚あります。
試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 監督者の指示に従って、解答用紙に受験番号を記入しなさい。
- 4 解答は、解答用紙の該当箇所に記入しなさい。ただし、該当箇所に記入しきれない場合は、その解答用紙の裏に記入してもよい。その場合、裏に記入したと明記しなさい。ただし、解答用紙の裏の上部 5 cm 以内には解答を記入してはいけません。
- 5 配付された解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

- (1) 平面上に一辺の長さが $\sqrt{3}r$ である正三角形 $\triangle ABC$ とその平面上を動く点 P がある。正三角形 $\triangle ABC$ の重心を始点とし P を終点とするベクトルを $\vec{p}$ とおく。次の問いに答えよ。なお、 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 等の $\cdot$ は 2 つのベクトルの内積の記号である。

(i) $s = \vec{PA} \cdot \vec{PA} + \vec{PB} \cdot \vec{PB} + \vec{PC} \cdot \vec{PC}$ とおくとき、 s をベクトル $\vec{p}$ の大きさ $|\vec{p}|$ と r を用いて表せ。

(ii) $t = \vec{PA} \cdot \vec{PB} + \vec{PB} \cdot \vec{PC} + \vec{PC} \cdot \vec{PA}$ とおくとき、 t をベクトル $\vec{p}$ の大きさ $|\vec{p}|$ と r を用いて表せ。

(iii) (i) の s と (ii) の t に関して P が 2 つの不等式

$$s \geq \frac{15}{4}r^2, \quad t \leq \frac{3}{2}r^2$$

を同時に満たすとき、 P が描く図形の領域を求めて正三角形 $\triangle ABC$ とともに図示せよ。

- (2) 座標平面上で、不等式 $x^2 + y^2 \leq 1$ の表す領域を D とする。点 (x, y) がこの領域 D を動くとき、次の問いに答えよ。

(i) $s = x + y$, $t = xy$ とするとき、点 (s, t) 全体の集合が表す領域を求めて st 平面上に図示せよ。

(ii) $a \geq 0$ に対して、 $(a - x)(a - y)$ の最小値を a を用いて表せ。

(iii) 3 枚の硬貨を同時に投げるとき、表が出た硬貨の枚数を b とする。
 $(b - x)(b - y)$ の最小値を M とするとき、 M の期待値を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ を次の式

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{2n} = \frac{2}{3} a_{2n-1}, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{3} a_{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(i) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ の和を求めよ。

(ii) $T_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} k a_k$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{2n}$ を求めよ。

必要ならば、 $-1 < r < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} n r^n = 0$ であることを用いてもよい。

(4) α は定数とし、 $f(x) = -\sin x + \alpha x$ とする。 $g(x)$ は連続関数で

$$f(x) = \int_0^x (t-x) g(t) dt$$

を満たすとする。また、 $h(x) = e^{-x} |g(x)|$ とする。次の問いに答えよ。

(i) 定数 α と関数 $g(x)$ を求めよ。

(ii) $0 < x < 2\pi$ において関数 $h(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。

(iii) 関数 $e^{-x}(\sin x + \cos x)$ の導関数を求めよ。

(iv) $k = 1, 2, 3, \dots$ に対して $I_k = \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} h(x) dx$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n I_k$ を求めよ。