

(1)

(i)

2 次方程式

$$x^2 \sin \theta - x \cos 2\theta + \sin \theta = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が重解を持つとき,

①式の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} D &= \cos^2 2\theta - 4 \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta \\ &= \cos^2 2\theta - 4 \sin^2 \theta = 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、倍角の公式を用いると,

$$\begin{aligned} D &= 1 - 2 \sin^2 \theta - 4 \sin^2 \theta \\ &= 4 \sin^4 \theta - 8 \sin^2 \theta + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \quad \because \sin^2 \theta < 1 \\ \therefore \sin \theta &= \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

が得られる。

$$\text{(答)} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

(ii)

半角の公式より,

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{12} &= \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 < \sin \frac{\pi}{12} < 1$ なので,

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} &= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(iii)

(i), (ii)より,

$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{\pi}{12} \right) \cdot \sqrt{2} &= \sin \theta \\ \therefore \sin \frac{\pi}{12} &< \sin \theta \end{aligned}$$

と分かる。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で、正弦関数は単調増加。

したがって,

$$\frac{\pi}{12} < \theta$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{\pi}{12} < \theta$$

(2)

(i)

$|\overrightarrow{AC}|$ に関する等式を考える。

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}|^2$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{DC}|^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} \quad \dots \textcircled{1}$$

題意より、

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$$

なので、①式に代入すると、

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{DC}|^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2$$

となり題意は示された。

(証明終)

(ii)

(i)と同様に $|\overrightarrow{BD}|$ に関する等式を考える。

$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}|^2$$

$$|\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} \quad \dots \textcircled{2}$$

題意より、

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$$

なので、②式は、

$$|\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。

(i)の結果より、

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2$$

を③式と辺々足すことにより、

$$2|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = 2|\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{CD}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$$

となり、題意は示された。

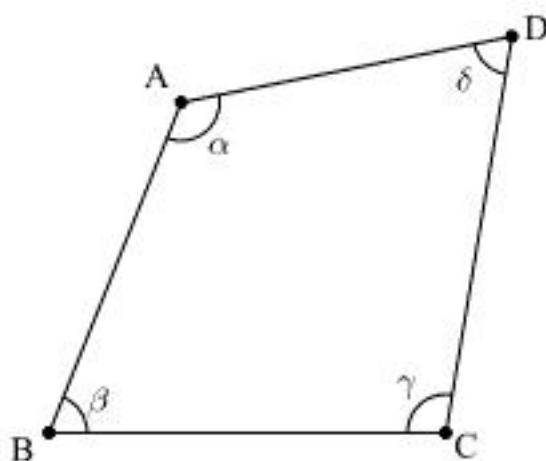
(証明終)

(iii)

(ii)の結果と③式より、

$$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}| \quad \dots \textcircled{4}$$

なので、次図のように角度を定めると、



題意より、

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{AB}| \cos \alpha = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos \beta$$

なので、(ii)の結果と④式を用いると、

$$\cos \alpha = \cos \beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta \quad \because \alpha + \beta < 2\pi, \alpha > 0, \beta > 0$$

が得られる。同様にして、

$$\beta = \gamma, \gamma = \delta$$

も言えるので、

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta$$

が得られる。よって、四角形の内角の和は 2π なので、

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\pi}{2}$$

が得られる。したがって、 $\beta = \frac{\pi}{2}$ より、

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$$

となる。

(証明終)

(3)

(i)

曲線 C 上の点 P は $x \geq 0$ なので, $P \sqrt{y}, y$ と書ける。

したがって, 2 点間の距離は,

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{\sqrt{y}^2 + y - a^2} \\ &= \sqrt{y^2 + 1 - 2a y + a^2} \end{aligned}$$

と表せる。

$$(答) \quad AP = \sqrt{y^2 + 1 - 2a y + a^2}$$

(ii)

(i)より,

$$\begin{aligned} AP^2 &= y^2 + 1 - 2a y + a^2 \\ &= \left(y + \frac{1-2a}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + a \end{aligned}$$

となる。この 2 次関数の頂点の y の座標が正になるとき $y > 0$ で最小値をとるため、求める条件は,

$$\begin{aligned} -\frac{1-2a}{2} &> 0 \\ \therefore a &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって, このとき $y = a - \frac{1}{2}$ で最小値 $a - \frac{1}{4}$ をとる。

以上より求める点 P_0 の座標は,

$$P_0 \left(\sqrt{a - \frac{1}{2}}, a - \frac{1}{2} \right)$$

となる。

$$(答) \quad a > \frac{1}{2}, \quad P_0 \left(\sqrt{a - \frac{1}{2}}, a - \frac{1}{2} \right)$$

(iii)

(ii)より,

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_0O} = \left(-\sqrt{a - \frac{1}{2}}, -a + \frac{1}{2} \right) \\ \overrightarrow{P_0A} = \left(-\sqrt{a - \frac{1}{2}}, \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

となるので, 内積の関係式を用いると,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{P_0O} \cdot \overrightarrow{P_0A}}{|\overrightarrow{P_0O}| |\overrightarrow{P_0A}|} \\ &= \frac{a - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-a + \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{a - \frac{1}{2} + \left(a - \frac{1}{2} \right)^2} \sqrt{a - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sqrt{a - \frac{1}{2}}}{\sqrt{a + \frac{1}{2}} \sqrt{a - \frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

が得られる。ここで,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\frac{1}{2} \sqrt{a - \frac{1}{2}}}{\sqrt{a + \frac{1}{2}} \sqrt{a - \frac{1}{4}}} > 0 \\ \Leftrightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \tan \theta &> 0 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \tan \theta &= 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \tan^2 \theta &= \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = \frac{\left(a + \frac{1}{2}\right) \left(a - \frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{4} \left(a - \frac{1}{2}\right)} - 1 = 8 \\ \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{2}\right) \left(a - \frac{1}{4}\right) &= \frac{9}{4} \left(a - \frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad a = 1$$