

(1)

(i)

解と係数の関係より,

$$\alpha + \beta + \gamma = 2$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3$$

$$\alpha\beta\gamma = 7$$

である。したがって,

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= 2^2 - 2 \cdot 3 \\ &= -2\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2$$

(ii)

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 &= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= 3^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2 \\ &= -19\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = -19$$

(iii)

(i)より,

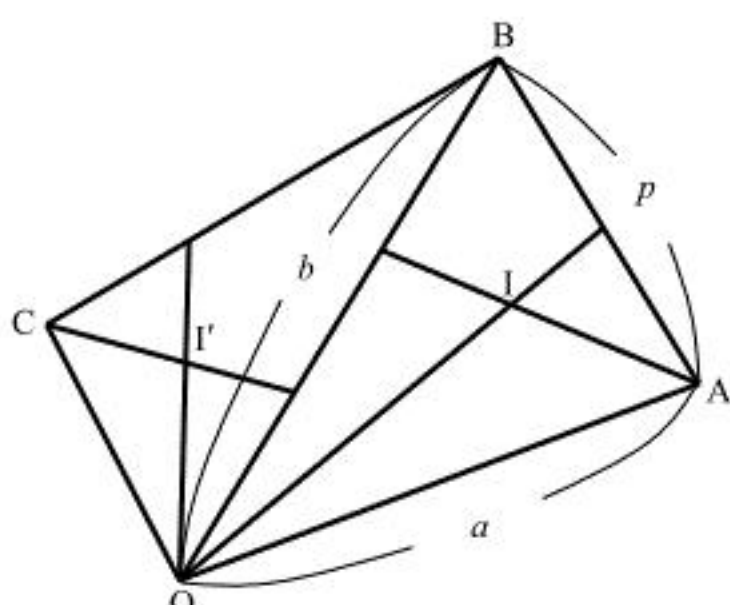
$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma \\ &= 2(-2 - 3) + 3 \cdot 7 \\ &= 11\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 11$$

(2)

(i)



s, t を実数として、 OI は $\angle AOB$ の二等分線より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} &= s \left(\frac{\overrightarrow{OA}}{a} + \frac{\overrightarrow{OB}}{b} \right) \\ &= bs' \vec{a} + as' \vec{b} \quad \left(s' = \frac{s}{ab} \right), \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

AI は $\angle OAB$ の二等分線より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} &= \vec{a} + \overrightarrow{AI} \\ &= \vec{a} + t \left(\frac{\overrightarrow{AO}}{a} + \frac{\overrightarrow{AB}}{p} \right) \\ &= \vec{a} + t' \{ -p\vec{a} + a(\vec{b} - \vec{a}) \} \quad \left(t' = \frac{t}{ap} \right) \\ &= \{ 1 - (a+p)t' \} \vec{a} + at' \vec{b} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

と表せる。①、②より、

$$\begin{cases} bs' = 1 - (a+p)t' \\ as' = at' \end{cases}$$

であり、これを解くと、

$$s' = t' = \frac{1}{a+b+p}$$

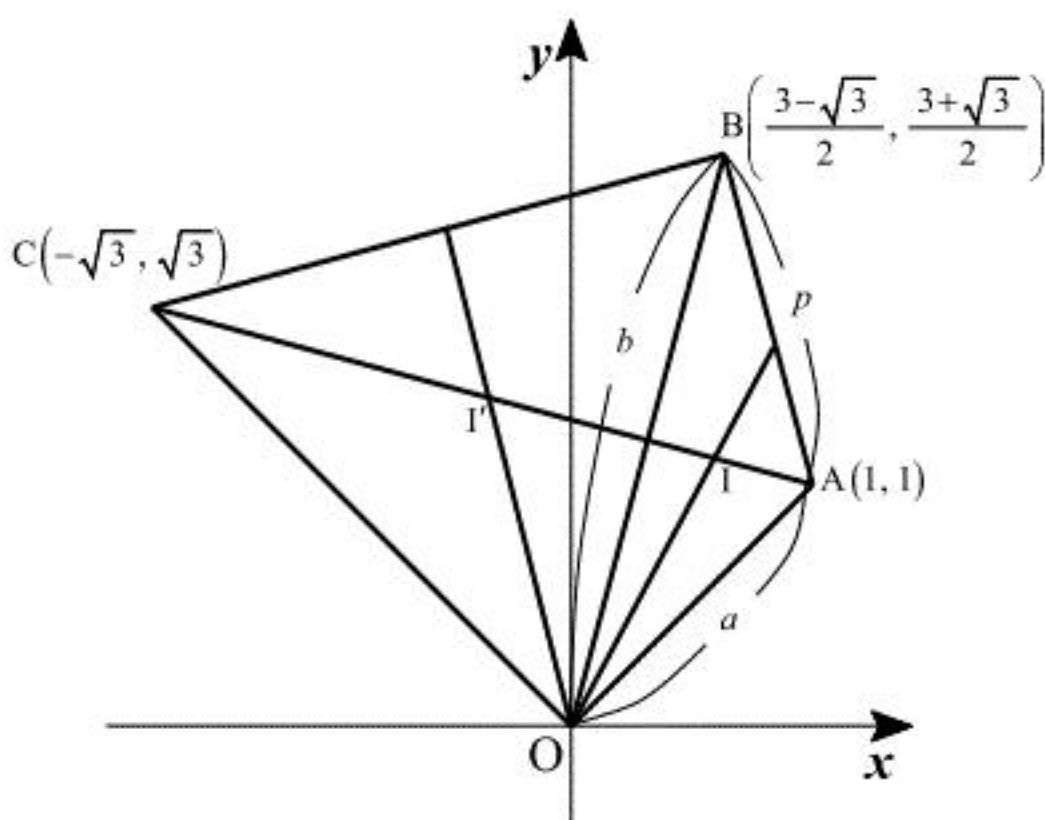
である。したがって、

$$\overrightarrow{OI} = \frac{b\vec{a} + a\vec{b}}{a+b+p}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OI} = \frac{b\vec{a} + a\vec{b}}{a+b+p}$$

(ii)



$$\begin{aligned}a &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ b &= \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \sqrt{6} \\ p &= \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2} - 1 \right)^2} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

である。また、

$$|\overrightarrow{OC}| = c, |\overrightarrow{BC}| = q$$

とすると、

$$\begin{aligned}c &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6} \\ q &= \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \right)^2 + \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \right)^2} = \sqrt{6}\end{aligned}$$

である。したがって、 $\triangle AOB$ は二等辺三角形であり、 $\triangle COB$ は正三角形であるから、 $OB \perp CA$ であり、点 I, I' は直線 AC 上にある。このとき、 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OI'}$ のなす角は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角に等しい。ここで、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= (1, 1) \\ \overrightarrow{AC} &= (-\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1)\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OA}| &= \sqrt{2} \\ |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{(-\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2} = 2\sqrt{2} \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} &= -\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} - 1 = -2\end{aligned}$$

であるから、

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

(3)

(i)

真数条件より、 $x > 0$ のときを考える。

$$f_n(x) = x \Leftrightarrow (\log x)^n = x \Leftrightarrow \frac{(\log x)^n}{x} - 1 = 0$$

であり、

$$g(x) = \frac{(\log x)^n}{x} - 1$$

とすると、

$$g'(x) = \frac{n(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\log x)^n}{x^2} = \frac{(\log x)^{n-1}(n - \log x)}{x^2}$$

である。

[1] n が偶数のとき

$g(x)$ の増減表は次のようになる。

n	(0)	...	1	...	e^n	...	(∞)
$g'(x)$		—	0	+	0	—	
$g(x)$	(∞)	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{n^n}{e^n} - 1$	$\searrow$	(-1)

増減表より、方程式 $f_n(x) = x$ が異なる 3 つの実数解をもつとき、

$$\frac{n^n}{e^n} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow n^n > e^n$$

$$\therefore n > e = 2.718\cdots$$

となる。 n は偶数であるから、 n は 4 以上の偶数となる。

[2] n が奇数のとき

$g(x)$ の増減表は次のようになる。

n	(0)	...	1	...	e^n	...	(∞)
$g'(x)$		+	0	+	0	—	
$g(x)$	($-\infty$)	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{n^n}{e^n} - 1$	$\searrow$	(-1)

増減表より、方程式 $f_n(x) = x$ が異なる 3 つの実数解をもつことはない。

以上[1], [2]より、 n は 4 以上の偶数となる。

(答) $n = 2l$ ($l = 2, 3, 4, \dots$)

(ii)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n!} \int_1^e (\log x)^n dx \\ &= \frac{1}{n!} \left[x (\log x)^n \right]_1^e - \frac{1}{n!} \int_1^e x n (\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} \int_1^e (\log x)^{n-1} dx \\ &= \frac{e}{n!} - a_{n-1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n = \frac{e}{n!} - a_{n-1}$

(iii)

(ii)より、

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{e} (a_n + a_{n-1})$$

である。また、 $1 \leq x \leq e$ のとき、

$$0 \leq (\log x)^n \leq 1$$

より、

$$0 \leq \int_1^e (\log x)^n dx \leq \int_1^e dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n!} \int_1^e (\log x)^n dx \leq \frac{e-1}{n!}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a_n \leq \frac{e-1}{n!}$$

であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e-1}{n!} = 0$$

であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{e} (a_k + a_{k-1}) \\ &= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -(a_0 + a_1) + (a_1 + a_2) - \cdots + (-1)^n (a_{n-1} + a_n) \right\} \\ &= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -a_0 + (-1)^n a_n \right\} \\ &= -\frac{a_0}{e} \\ &= -\frac{1}{e} \int_1^e dx \\ &= -\frac{e-1}{e} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} = -\frac{e-1}{e}$