

(1)

(i)

a, b, c を実数とし、求める2次関数の方程式を、

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

とおくと、このグラフが3点 $(-2, 46), (3, -4), (5, 4)$ を通るので、

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 46 \\ 9a + 3b + c = -4 \\ 25a + 5b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -12 \\ c = 14 \end{cases}$$

である。したがって、

$$y = f(x) = 2x^2 - 12x + 14$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = 2x^2 - 12x + 14$$

(ii)

$$2x^2 - 12x + 14 = -2x + 6$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 1, 4$$

であるから、2つの交点の座標は、

$$(1, 4), (4, -2)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (1, 4), (4, -2)$$

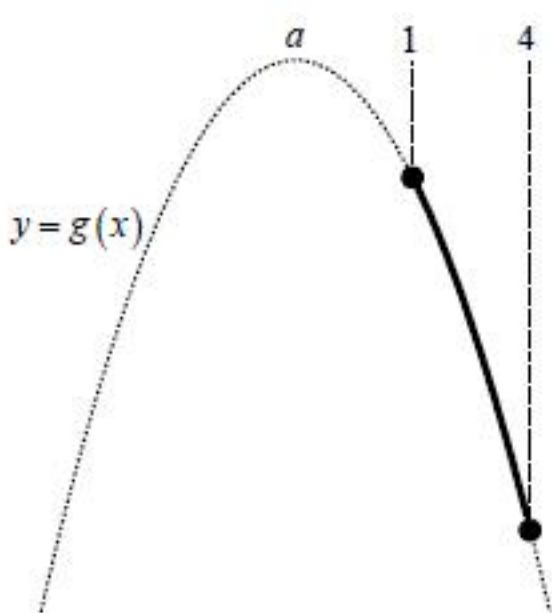
(iii)

$p = 1, q = 4$ であるから、2次関数、

$$y = -x^2 + 2ax + 3 - a^2 = -(x-a)^2 + 3 \quad (=g(x) \text{ とする})$$

の $1 \leq x \leq 4$ における最大値を求めればよい。

[1] $a \leq 1$ のとき

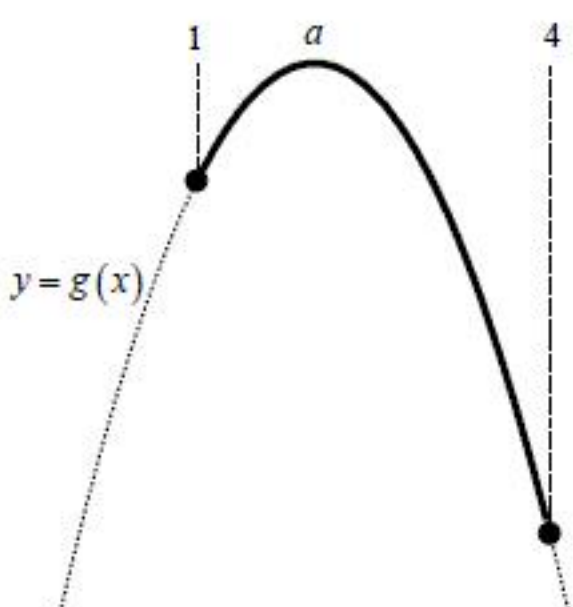


グラフより、 $y = g(x)$ の最大値は、

$$g(1) = -a^2 + 2a + 2$$

である。

[2] $1 < a \leq 4$ のとき

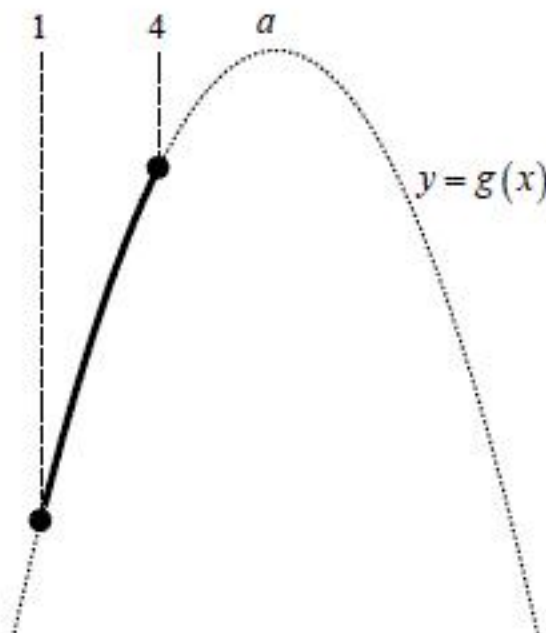


グラフより、 $y = g(x)$ の最大値は、

$$g(a) = 3$$

である。

[3] $a > 4$ のとき



グラフより、 $y = g(x)$ の最大値は、

$$g(4) = -a^2 + 8a - 13$$

である。

以上[1], [2], [3]より、2次関数 $y = g(x)$ の $1 \leq x \leq 4$ における最大値は、

$$\begin{cases} -a^2 + 2a + 2 & (a \leq 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (1 < a \leq 4 \text{ のとき}) \\ -a^2 + 8a - 13 & (a > 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} -a^2 + 2a + 2 & (a \leq 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (1 < a \leq 4 \text{ のとき}) \\ -a^2 + 8a - 13 & (a > 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

(i)

方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると、実数解を持つとき $D \geq 0$ であればよい。
したがって、

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 4b &\geq 0 \end{aligned}$$

であればよい。これを満たす自然数 a, b ($1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6$) の組は、

$$\begin{aligned} (a, b) = & (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), \\ & (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), \\ & (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{aligned}$$

の 19 通りがある。したがって、求める確率は、

$$\frac{19}{6^2} = \frac{19}{36}$$

となる。

(答) $\frac{19}{36}$

(ii)

(i) の条件が満たされるもとの、方程式 $f(x)=0$ の 2 実数解を α, β ($\alpha \leq \beta$ であり、 $\alpha = \beta$ のとき重解) とおくと、解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = a$ が成り立つ。ここで、 a は整数なので、 α, β のうち一方が整数ならば、他方も整数であることがわかる。さらにこのとき、解と係数の関係より、

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= a > 0 && \cdots \textcircled{1} \\ \alpha\beta &= b > 0 && \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成り立つので、 α, β はいずれも自然数と分かる。

[1] $a=1$ のとき

①, ② を満たす (α, β) はない。

[2] $a=2$ のとき

①, ② を満たす (α, β) は $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ の 1 種類。

[3] $a=3$ のとき

①, ② を満たす (α, β) は $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ の 1 種類。

[4] $a=4$ のとき

①, ② を満たす (α, β) は $(\alpha, \beta) = (1, 3), (2, 2)$ の 2 種類。

[5] $a=5$ のとき

①, ② を満たす (α, β) は $(\alpha, \beta) = (1, 4), (2, 3)$ の 2 種類。

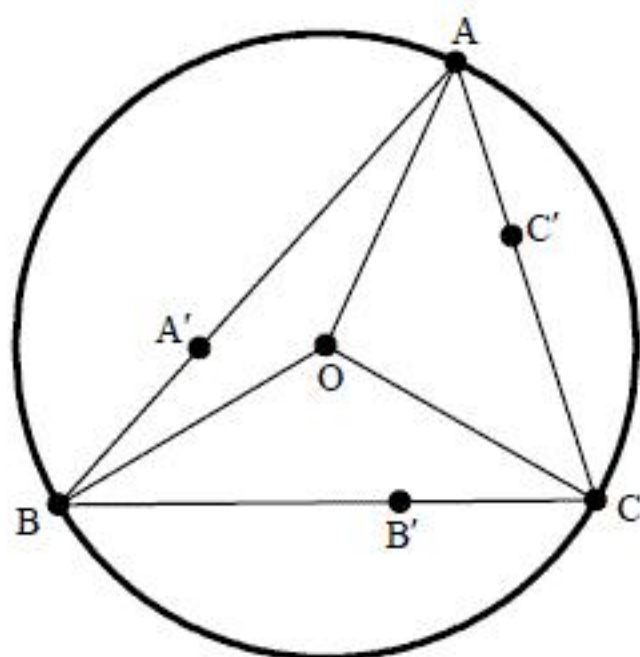
[6] $a=6$ のとき

①, ② を満たす (α, β) は $(\alpha, \beta) = (1, 5)$ の 1 種類。

以上 [1] ~ [6] より、問の条件を満たす α, β の組は 7 通りあり、それぞれ異なる a, b の組に対応するので、求める確率は $\frac{7}{36}$ である。

(答) $\frac{7}{36}$

(3)



(i)

点 A' は線分 AB を $2:1$ に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA'}|^2 &= \left| \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \right|^2 \\ &= \frac{1}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{9}r^2 + \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}r^2 \\ &= \frac{5}{9}r^2 + \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{OA'}|^2 = \frac{5}{9}r^2 + \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b}$$

(ii)

(i)と同様にすると、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OB'}|^2 &= \frac{5}{9}r^2 + \frac{4}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} \\ |\overrightarrow{OC'}|^2 &= \frac{5}{9}r^2 + \frac{4}{9}\vec{c} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

である。3点 A' , B' , C' を通る円の中心が点 O と一致するので、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA'}|^2 &= |\overrightarrow{OB'}|^2 = |\overrightarrow{OC'}|^2 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{9}r^2 + \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{5}{9}r^2 + \frac{4}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{5}{9}r^2 + \frac{4}{9}\vec{c} \cdot \vec{a} \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \\ \Leftrightarrow r^2 \cos \angle AOB &= r^2 \cos \angle BOC = r^2 \cos \angle COA \\ \Leftrightarrow \cos \angle AOB &= \cos \angle BOC = \cos \angle COA \end{aligned}$$

である。ここで、 $0^\circ \leq \angle AOB \leq 180^\circ$, $0^\circ \leq \angle BOC \leq 180^\circ$, $0^\circ \leq \angle COA \leq 180^\circ$ であるから、
 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$

である。また、 $OA = OB = OC$ であるから、

$$\begin{aligned} \triangle AOB &\equiv \triangle BOC \equiv \triangle COA \\ \therefore AB &= BC = CA \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\triangle ABC$ は正三角形である。

(証明終)