

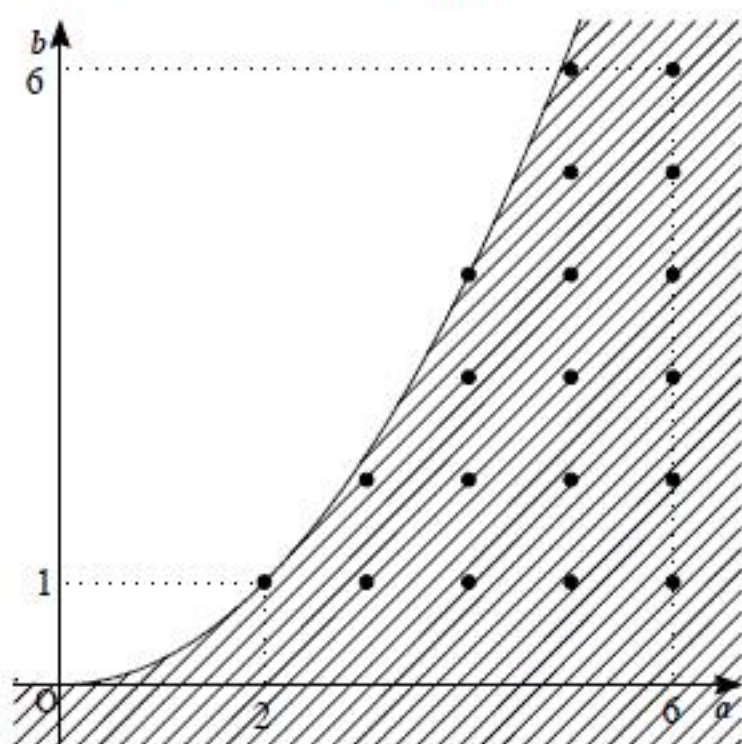
(1)

(i)

方程式 $f(x)=0$ の判別式を D と置いたときに、 $D \geq 0$ となる確率であり、

$$D = a^2 - 4b \geq 0$$

と表せる。この領域は ab 平面上において次図斜線部である。



(a, b) は $1 \leq a, b \leq 6$ を満たす格子点上にあり、このうち問の条件を満たすものは前図より

19通りあることがわかる。よって、求める確率は、 $\frac{19}{36}$ である。

(答) $\frac{19}{36}$

(ii)

(i)の条件が満たされるもとの、方程式 $f(x)=0$ の2実数解を α, β ($\alpha \leq \beta$ であり、 $\alpha = \beta$ のとき重解)とおくと、解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = a$ が成り立つ。ここで、 a は整数なので、 α, β のうち一方が整数ならば、他方も整数であることがわかる。さらにこのとき、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = a > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta = b > 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つので、 α, β はいずれも自然数と分かる。

[1] $a=1$ のとき

①, ②を満たす (α, β) はない。

[2] $a=2$ のとき

①, ②を満たす (α, β) は $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ の1種類。

[3] $a=3$ のとき

①, ②を満たす (α, β) は $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ の1種類。

[4] $a=4$ のとき

①, ②を満たす (α, β) は $(\alpha, \beta) = (1, 3), (2, 2)$ の2種類。

[5] $a=5$ のとき

①, ②を満たす (α, β) は $(\alpha, \beta) = (1, 4), (2, 3)$ の2種類。

[6] $a=6$ のとき

①, ②を満たす (α, β) は $(\alpha, \beta) = (1, 5)$ の1種類。

以上[1]～[6]より、問の条件を満たす α, β の組は7通りあり、それぞれ異なる a, b の組に対応するので、求める確率は $\frac{7}{36}$ である。

(答) $\frac{7}{36}$

(iii)

$$g(x) = (x-b)(x^2 - ax + b) = (x-b)f(x)$$

と因数分解できるので、方程式 $g(x)=0$ は少なくとも1つの整数解 $x=b$ をもつ。

[1] $f(x)=0$ がただ一つの整数解をもつとき

これは、(ii)において $(\alpha, \beta) = (1, 1), (2, 2)$ のときであり、

$(\alpha, \beta) = (1, 1)$ のとき、 $b = \alpha\beta = 1$ となり、不適。

$(\alpha, \beta) = (2, 2)$ のとき、 $a = 4$ 、 $b = \alpha\beta = 4$ となり、 $g(x)=0$ はちょうど2つの整数解2, 4をもつ。

[2] $f(x)=0$ が異なる2つの整数解をもつとき

$g(x)=0$ が異なる整数解をちょうど2つ持つには、 $b = \alpha$ または $b = \beta$ であることが必要十分条件になる。ここで、②より、 $b = \alpha\beta$ なので、これを満たす α, β は、

$$(\alpha, \beta) = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$$

の4通り。このとき、 a, b は、

$$(a, b) = (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$$

である。

以上[1], [2]より、問の条件を満たす a, b の組は5通りあるので、求める確率は $\frac{5}{36}$ とわかる。

(答) $\frac{5}{36}$

(2)

(i)

まず、円 C_1 と円 C_2 の交点の座標を求める。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & \cdots \textcircled{1} \\ (x-10)^2 + (y-5)^2 = 50 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow x^2 - 20x + y^2 - 10y = -75$$

これから①式を辺々引いて、

$$-20x - 10y = -100$$

$$\Leftrightarrow y = -2x + 10 \quad \cdots \textcircled{3}$$

さらに、これを①式に代入して、

$$x^2 + 4x^2 - 40x + 100 = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3, 5$$

これと③式より、円 C_1 と円 C_2 の交点の座標は、

$$(3, 4), (5, 0)$$

とわかる。これらの点をそれぞれ点 A 、点 B とおき、更に原点を O とすれば、円 C_3 の中心は、

線分 OB の垂直二等分線 $x = \frac{5}{2}$ と、線分 AB の垂直二等分線 $y = \frac{1}{2}x$ の交点、すなわち

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4} \right)$$

である。また、円 C_3 の半径は、この点と原点との距離なので、

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2} \right)^2 + \left(\frac{5}{4} \right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{中心} \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4} \right), \text{半径} \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

(ii)

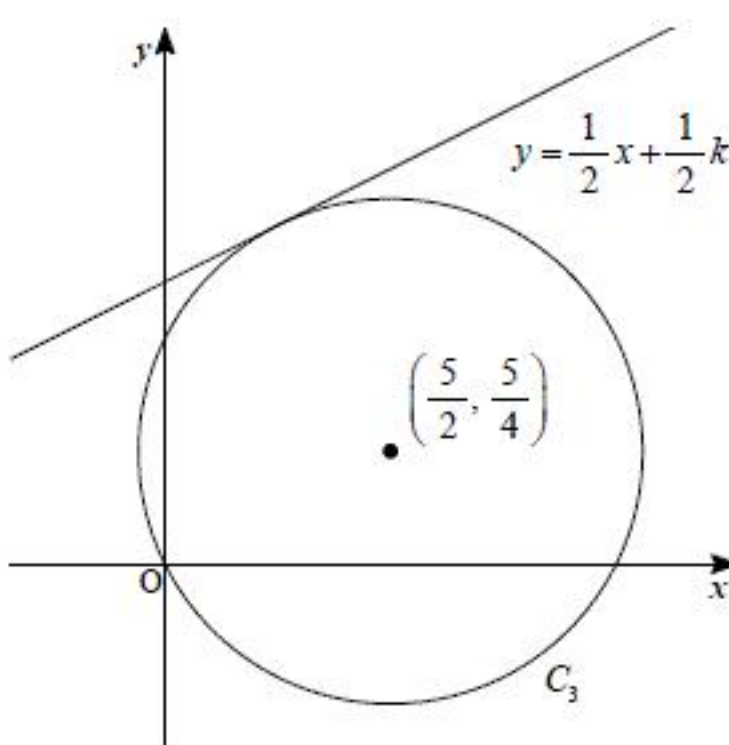
円 C_3 の方程式は、

$$\left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{5}{4} \right)^2 = \frac{125}{16}$$

である。 $2y - x = k$ とおくと、

$$2y - x = k$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k \quad \cdots \textcircled{4}$$



より、 k が最大になるのは、④の直線と円 C_3 とが前図のように接するときである。また、円 C_3 は原点を通るので、 k の最大値は 0 以上であることがわかる。点と直線の距離の公式より、このとき、

$$\frac{\left| \frac{5}{2} - \frac{5}{2} + k \right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

$$\Leftrightarrow |k| = \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{25}{4} \quad (\because k \geq 0)$$

が成り立つ。すなわち、 $k(=2y-x)$ の最大値は $\frac{25}{4}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{25}{4}$$

(iii)

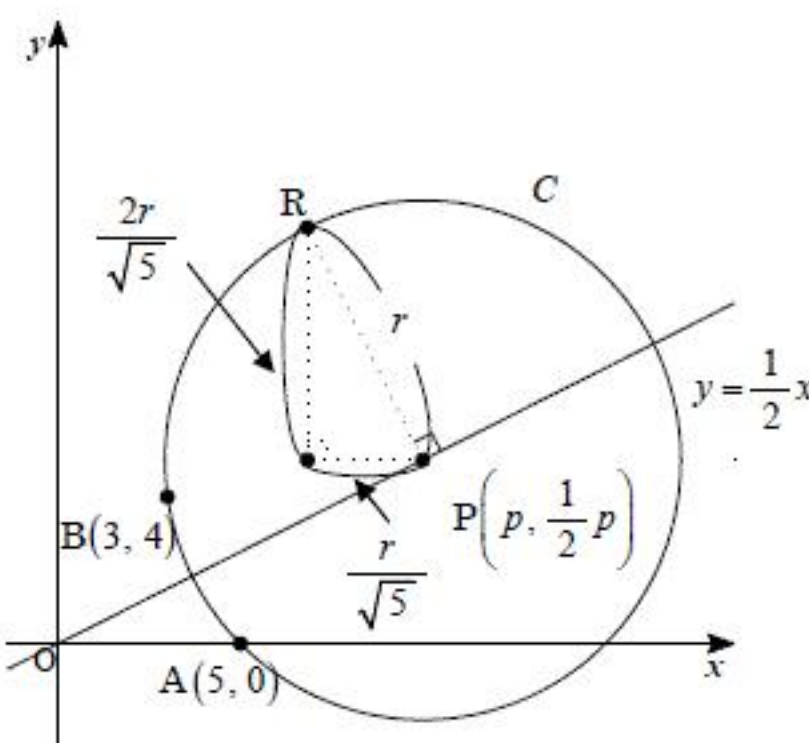
円 C_1 と円 C_2 の 2 つの交点 A, B を通る円の中心は、2 点 A, B から等距離にあることから、求める中心の軌跡は線分 AB の垂直二等分線であり、その方程式は

$$y = \frac{1}{2}x$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{2}x$$

(iv)



円 C の半径を r 、中心を点 P とし、点 P の座標を $\left(p, \frac{1}{2}p \right)$ とおく。この円は、(i) で定義した 2 点 A, B を通るので、その直径は線分 AB の長さ以上である。すなわち、

$$2r \geq 2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow r \geq \sqrt{5} \quad \cdots \textcircled{5}$$

である。さらに、点 P を通り、傾きが -2 の直線と、円 C との交点を点 R とおくと、点 R における円 C の接線の傾きが $\frac{1}{2}$ であることに注意すれば、問(ii)と同様に考えて、この円において $2y-x$ は点 Q と点 R が一致するときに最大となる。点 R の座標は、

$$\left(p - \frac{r}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2}p + \frac{2r}{\sqrt{5}} \right)$$

と書けることから、この点における $2y-x$ の値は、

$$2 \left(\frac{1}{2}p + \frac{2r}{\sqrt{5}} \right) - \left(p - \frac{r}{\sqrt{5}} \right) = \sqrt{5}r \geq 5 (\because \textcircled{5}) \quad \cdots \textcircled{6}$$

となる。すなわち、円 C をどのようにとっても $2y-x$ の最大値は 5 以上である。

一方で、⑥の等式は、線分 AB を直径とするように円 C を定めたときのみで成立し、このとき円 C の中心と半径はそれぞれ、

$$(4, 2), \sqrt{5}$$

であり、これが求める値である。

$$(\text{答}) \quad \text{中心} : (4, 2), \text{半径} : \sqrt{5}$$

(3)

(i)

$$\begin{aligned}\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 &= \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \sin 2x\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - 2\cos x\right)^2 \\&= \left(\frac{27}{16} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \sin^2 2x\right) - \left(\frac{27}{16} - 3\sqrt{3}\cos x + 4\cos^2 x\right) \\&= -\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \sin^2 2x + 3\sqrt{3}\cos x - 4\cos^2 x \\&= -\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1 - \cos 4x}{2} + 3\sqrt{3}\cos x - 2(1 + \cos 2x) \\&= -\frac{1}{2}\cos 4x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin 2x - 2\cos 2x + 3\sqrt{3}\cos x - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

と変形できるので、

$$\int \left[\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 \right] dx = -\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{3\sqrt{3}}{4}\cos 2x - \sin 2x + 3\sqrt{3}\sin x - \frac{3}{2}x + C$$

(C は積分定数)

と求まる。

$$\begin{aligned}(\text{答}) \quad & \int \left[\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 \right] dx \\&= -\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{3\sqrt{3}}{4}\cos 2x - \sin 2x + 3\sqrt{3}\sin x - \frac{3}{2}x + C \quad (C : \text{積分定数})\end{aligned}$$

(ii)

$$\sin 2x \leq a - 2\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + 2\cos x \leq a \quad \dots \textcircled{1}$$

$h(x) = \sin 2x + 2\cos x$ とおくと、求める a の値は、 $h(x)$ の最大値である。また、

$h(x) = h(x + 2\pi)$ が成り立つので、 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で考えれば十分である。

$$\begin{aligned}h'(x) &= 2\cos 2x - 2\sin x \\&= 2(1 - 2\sin^2 x) - 2\sin x \\&= -2(\sin x + 1)(2\sin x - 1)\end{aligned}$$

より、この範囲で $h(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5\pi}{6}$	...	$\frac{3\pi}{2}$	...	2π
$\sin x$	0	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	...	-1	...	0
$h'(x)$	+	+	0	-	0	+	0	+	+
$h(x)$	2	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2

よって、すべての実数 x に対して $h(x)$ の最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ であり、これが求める値である。

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 &= -\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \sin^2 2x + 3\sqrt{3}\cos x - 4\cos^2 x \\&= -3\sqrt{3}\sin x \cos x + 4\sin^2 x \cos^2 x + 3\sqrt{3}\cos x - 4\cos^2 x \\&= 4\cos^2 x(\sin^2 x - 1) + 3\sqrt{3}\cos x(1 - \sin x) \\&= 2\cos x(1 - \sin x) \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2\cos x - \sin 2x \right)\end{aligned}$$

ここで、 $1 - \sin x \geq 0$ である。また、(ii)より、すべての実数 x に対して、

$$\begin{aligned}\sin 2x + 2\cos x &\leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \\&\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2\cos x - \sin 2x \geq 0\end{aligned}$$

が成り立つので、 $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2$ の正負は $\cos x$ のそれと等しく、

$$\left| \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 \right| = \begin{cases} \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \\ \{g(x)\}^2 - \{f(x)\}^2 & (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left| \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 \right| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 \right] dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left[\{g(x)\}^2 - \{f(x)\}^2 \right] dx \\&= \left[-\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{3\sqrt{3}}{4}\cos 2x - \sin 2x + 3\sqrt{3}\sin x - \frac{3}{2}x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\&\quad - \left[-\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{3\sqrt{3}}{4}\cos 2x - \sin 2x + 3\sqrt{3}\sin x - \frac{3}{2}x \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\&= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^\pi \left| \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 \right| dx = 3\sqrt{3}$$