

(1)

(i)

①

$$\begin{aligned}g^4 &= 5 \\ \Leftrightarrow 2^{\frac{702+m}{300}} &= 5 \\ \Leftrightarrow \frac{702+m}{300} &= \log_2 5 = 2.32 \\ \therefore m &= 300 \cdot 2.32 - 702 = -6\end{aligned}$$

となる。

(答) $m = -6$

②

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^6} g^{12} &= 2^{\frac{1200+n}{1200}} \\ \Leftrightarrow 2^{-6} \cdot 2^{\frac{702+m}{100}} &= 2^{\frac{1200+n}{1200}} \\ \Leftrightarrow -6 + \frac{702+m}{100} &= \frac{1200+n}{1200} \\ \therefore n &= 12m + 24\end{aligned}$$

となる。

(答) $n = 12m + 24$

(ii)

$$t = \frac{1200+x}{1200} \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned}dt &= \frac{1}{1200} dx \\ \Leftrightarrow dx &= 1200 dt\end{aligned}$$

であり,

x	$0 \rightarrow 1200$
t	$1 \rightarrow 2$

であるから,

$$\begin{aligned}\int_0^{1200} 2^{\frac{1200+x}{1200}} dx &= \int_1^2 2^t \cdot 1200 dt \\ &= 1200 \left[\frac{2^t}{\log 2} \right]_1^2 \\ &= \frac{1200}{\log 2} (4-2) \\ &= \frac{2400}{\log 2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2400}{\log 2}$

(2)

(i)

$$f'(x) = e^x$$

であるから、 $y = f(x)$ 上の点 (t, e') における接線の方程式は、

$$y = e'(x - t) + e' \quad \dots \textcircled{1}$$

である。①が原点を通るとき、

$$0 = e'(0 - t) + e'$$

$$\Leftrightarrow e'(t - 1) = 0$$

$$\therefore t = 1$$

であるから、原点から $y = f(x)$ に引いた接線の方程式は、

$$y = e(x - 1) + e$$

$$\therefore y = ex$$

となる。

(答) $y = ex$

(ii)

(i)より、 $P_1(1, e)$ であるから、 $A_1(1, 0)$ である。

①が点 A_1 を通るとき、

$$0 = e'(1 - t) + e'$$

$$\Leftrightarrow e'(t - 2) = 0$$

$$\therefore t = 2$$

であるから、点 A_1 から $y = f(x)$ のグラフに引いた接線の方程式は、

$$y = e^2(x - 2) + e^2$$

$$\therefore y = e^2x - e^2$$

となる。

(答) $y = e^2x - e^2$

(iii)

(ii)より、 $P_2(2, e^2)$ であるから、 $A_2(2, 0)$ である。

したがって、 $a_1 = 1, a_2 = 2$ であるから、

$$a_n = n \quad \dots \textcircled{2}$$

と推定できる。

[1] $n = 1$ のとき

$a_1 = 1$ であるから、②は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき、②が成り立つと仮定すると

$A_k(k, 0)$ であり、①が点 A_k を通るとすると、

$$0 = e'(k - t) + e'$$

$$\Leftrightarrow e'\{t - (k + 1)\} = 0$$

$$\therefore t = k + 1$$

であるから、 $P_{k+1}(k + 1, e^{k+1})$ である。

したがって、 $A_{k+1}(k + 1, 0)$ であるから、 $n = k + 1$ のときも②は成り立つ。

以上[1], [2]より、全ての自然数 n に対して、②が成り立つことが証明された。

(証明終)

(答) $a_n = n$

(3)

(i)

$$\begin{cases} \vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} \\ \vec{q} = \frac{-\vec{a} + 2\vec{b}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{p} - 2\vec{q} \\ \vec{b} = \frac{1}{4}\vec{p} + \vec{q} \end{cases}$$

であるから、 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ のとき、

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2}\vec{p} - 2\vec{q} \right|^2 &= \left| \frac{1}{4}\vec{p} + \vec{q} \right|^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}|\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} + 4|\vec{q}|^2 &= \frac{1}{16}|\vec{p}|^2 + \frac{1}{2}\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 \\ \therefore \vec{p} \cdot \vec{q} &= \frac{3}{40}|\vec{p}|^2 + \frac{6}{5}|\vec{q}|^2 = \frac{3}{40} \cdot 4^2 + \frac{6}{5} \cdot 1^2 = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{12}{5}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \vec{b} - \vec{a} \\ &= \left(\frac{1}{4}\vec{p} + \vec{q} \right) - \left(\frac{1}{2}\vec{p} - 2\vec{q} \right) \\ &= -\frac{1}{4}\vec{p} + 3\vec{q} \end{aligned}$$

であるから、直線 AB と直線 PQ が直交するとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{4}\vec{p} + 3\vec{q} \right) \cdot (\vec{q} - \vec{p}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}|\vec{p}|^2 + 3|\vec{q}|^2 - \frac{13}{4}\vec{p} \cdot \vec{q} &= 0 \\ \therefore \vec{p} \cdot \vec{q} &= \frac{1}{13}|\vec{p}|^2 + \frac{12}{13}|\vec{q}|^2 = \frac{1}{13} \cdot 4^2 + \frac{12}{13} \cdot 1^2 = \frac{28}{13} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{28}{13}$$

(iii)

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= \left| \frac{1}{2}\vec{p} - 2\vec{q} \right|^2 = \frac{1}{4}|\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} + 4|\vec{q}|^2 = -2\vec{p} \cdot \vec{q} + 8 \\ |\vec{b}|^2 &= \left| \frac{1}{4}\vec{p} + \vec{q} \right|^2 = \frac{1}{16}|\vec{p}|^2 + \frac{1}{2}\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 = \frac{1}{2}\vec{p} \cdot \vec{q} + 2 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \left(\frac{1}{2}\vec{p} - 2\vec{q} \right) \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{p} + \vec{q} \right) = \frac{1}{8}|\vec{p}|^2 - 2|\vec{q}|^2 = 0 \end{aligned}$$

であるから、 $\triangle OAB$ の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{(-2\vec{p} \cdot \vec{q} + 8) \left(\frac{1}{2}\vec{p} \cdot \vec{q} + 2 \right)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{16 - (\vec{p} \cdot \vec{q})^2} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{q} &= 0 \\ \therefore \theta &= 90^\circ \end{aligned}$$

のとき、 $\triangle OAB$ の面積は最大となる。

$$(\text{答}) \quad \theta = 90^\circ$$