

(1)

(i)

$f(x)$ を変形すると,

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 2ax \\ &= (x-a)^2 - a^2\end{aligned}$$

となるので, $y = f(x)$ のグラフの頂点は,

$$(a, -a^2)$$

である。

(答) $(a, -a^2)$

(ii)

$$\begin{aligned}f(x) - x &= x^2 - 2ax - x \\ &= x^2 - (2a+1)x \\ &= x\{x - (2a+1)\}\end{aligned}$$

である。 $a > -\frac{1}{2}$ より,

$$2a+1 > 0$$

であるので,

$$f(x) \geq x$$

$$\Leftrightarrow x\{x - (2a+1)\} \geq 0$$

$$\therefore x \leq 0, 2a+1 \leq x$$

と求まる。

(答) $x \leq 0, 2a+1 \leq x$

(iii)

$$f(x) = (x-a)^2 - a^2$$

であるから, $y = f(x)$ は $x = a$ を軸とする下に凸の放物線を表す。

[1] $-\frac{1}{2} < a \leq 0$ のとき

軸 $x = a$ は範囲 $x \leq 0, 2a+1 \leq x$ に含まれるので, $f(x)$ の最小値は

$$f(a) = -a^2$$

となる。

[2] $a > 0$ のとき

範囲 $x \leq 0, 2a+1 \leq x$ のうち, 軸 $x = a$ に最も近いのは $x = 0$ である。よって, $f(x)$ の最小値は

$$f(0) = 0$$

となる。

以上[1], [2]より, 求める最小値は

$$\begin{cases} -a^2 & (-\frac{1}{2} < a \leq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (a > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

(答)

$$\begin{cases} -a^2 & (-\frac{1}{2} < a \leq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (a > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

(i)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}| &= \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \\ |\overrightarrow{OB}| &= \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 + 3 = 1 \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

と求まる。

(答) $\cos \theta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$

(ii)

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 10 - 1} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{7}{2}$

(iii)

実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OM} = (1-t) \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB}$$

と表せる。また、

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

となる。いま、 $OM \perp BC$ であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ (1-t) \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB} \right\} \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} (1-t) |\overrightarrow{OA}|^2 + \left(\frac{3}{2} t - 1 \right) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - t |\overrightarrow{OB}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2} (1-t) + \left(\frac{3}{2} t - 1 \right) - 10t &= 0 \\ \Leftrightarrow -11t + \frac{3}{2} &= 0 \\ \therefore t &= \frac{3}{22} \end{aligned}$$

と求まる。以上より、

$$AM : MB = t : (1-t) = 3 : 19$$

と求まる。

(答) $AM : MB = 3 : 19$

(3)

(i)

放物線 $C: y = x^2 + 2x - 2$ のと直線 $l: y = kx$ を連立して整理すると,

$$x^2 + (2-k)x - 2 = 0$$

となる。この x の 2 次方程式の解が α, β であるから、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = k - 2$$

$$\alpha\beta = -2$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}(\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\&= (k - 2)^2 - 4 \cdot (-2) \\&= k^2 - 4k + 12\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad (\beta - \alpha)^2 = k^2 - 4k + 12$$

(ii)

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) \{ (x - \alpha) + \alpha - \beta \} dx \\&= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ (x - \alpha)^2 - (\beta - \alpha)(x - \alpha) \right\} dx \\&= \left[\frac{1}{3} (x - \alpha)^3 - \frac{1}{2} (\beta - \alpha)(x - \alpha)^2 \right]_{\alpha}^{\beta} \\&= \frac{1}{3} (\beta - \alpha)^3 - \frac{1}{2} (\beta - \alpha)^3 \\&= -\frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3\end{aligned}$$

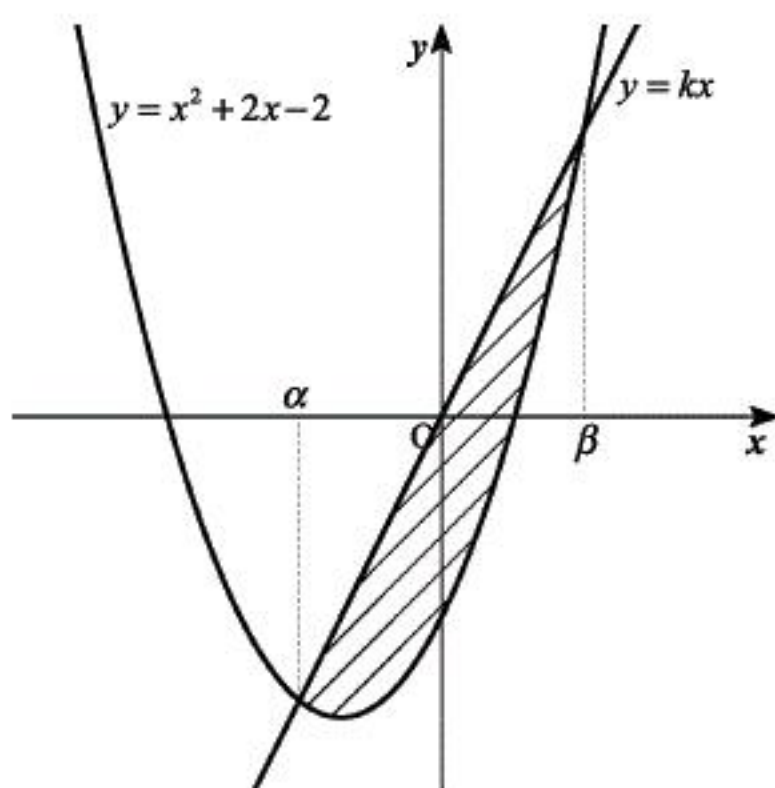
と変形できる。したがって、

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3$$

が示された。

(証明終)

(iii)



面積 S は上図の斜線部の面積であるから、

$$\begin{aligned}S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{ kx - (x^2 + 2x - 2) \} dx \\&= - \int_{\alpha}^{\beta} \{ x^2 + (2-k)x - 2 \} dx \\&= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\&= \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3\end{aligned}$$

と表せる。したがって、 S^2 は

$$\begin{aligned}S^2 &= \frac{1}{6^2} \left\{ (\beta - \alpha)^2 \right\}^3 \\&= \frac{1}{36} (k^2 - 4k + 12)^3 \\&= \frac{1}{36} \left\{ (k - 2)^2 + 8 \right\}^3\end{aligned}$$

と表せる。よって、 S^2 は $k = 2$ のとき最小値

$$\frac{1}{36} \cdot 8^3 = \frac{128}{9}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値: } \frac{128}{9} \quad (k = 2 \text{ のとき})$$