

(1)

(i)

$$\begin{aligned} & 4x^2 + 12y^2 - 12xy + 4x - 18y + 7 \\ &= 4x^2 + 4(-3y+1)x + 12y^2 - 18y + 7 \\ &= 4\left(x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\right)^2 - (-3y+1)^2 + 12y^2 - 18y + 7 \\ &= 4\left(x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\right)^2 + 3y^2 - 12y + 6 \\ &= 4\left(x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\right)^2 + 3(y-2)^2 - 6 \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、

$$\begin{cases} x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$(x, y) = \left(\frac{5}{2}, 2\right)$$

のとき、与式は最小値 -6 をとる。

(答) 最小値: -6 ($x = \frac{5}{2}, y = 2$ のとき)

(ii)

$$4x^2 + 12y^2 - 12xy + 4x - 18y + 7 = a \quad \cdots (*)$$

において a は負の実数であり、

$$\left(x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

であるから、(i)より、

$$0 \leq (y-2)^2 < 2$$

でなければならない。また、 y は整数であるから、上の不等式を満たす y は、

$$y = 1, 2, 3$$

である。したがって、 y の値によって場合分けをして x, y が隣り合う整数のときの a の最大値を求める。

[1] $y = 1$ のとき、

(*)は、

$$4(x-1)^2 - 3 = a$$

と変形できる。 a は負の実数であるから、上式を満たす整数 x は、

$$x = 1$$

のみであるが、このとき x と y は隣り合わないので不適である。

[2] $y = 2$ のとき、

(*)は、

$$4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - 6 = a$$

と表せる。 a は負の実数であるから、上式を満たす整数 x は、

$$x = 2, 3$$

である。 x と y は隣り合うから、

$$x = 3$$

となる。このとき a の値は、

$$a = -5$$

である。

[3] $y = 3$ のとき、

(*)は、

$$4(x-4)^2 - 3 = a$$

と表せる。 a は負の実数であるから、上式を満たす整数 x は、

$$x = 4$$

のみである。このとき x と y は隣り合う整数であり、 a の値は、

$$a = -3$$

である。

以上[1], [2], [3]より、 a の最大値は、

$$a = -3$$

であり、この時の (x, y) は、

$$(x, y) = (4, 3)$$

となる。

(答) 最大値: -3 ($x = 4, y = 3$ のとき)

(2)

(i)

$$\frac{1}{\sin \theta}-\frac{1}{\cos \theta}=a$$

の両辺を2乗して,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin ^2 \theta}-\frac{2}{\sin \theta \cos \theta}+\frac{1}{\cos ^2 \theta}=a^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{\cos ^2 \theta+\sin ^2 \theta}{\sin ^2 \theta \cos ^2 \theta}-\frac{2}{\sin \theta \cos \theta}=a^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{(\sin \theta \cos \theta)^2}-\frac{2}{\sin \theta \cos \theta}=a^2 \end{aligned}$$

と変形できる。 $\sin \theta \cos \theta=t>0$ ($\because 0^{\circ}<\theta<45^{\circ}$) とおくと,

$$\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=a^2$$

と表せるから, 両辺に t^2 をかけて,

$$\begin{aligned} 1-2 t &=a^2 t^2 \\ \Leftrightarrow a^2 t^2+2 t-1 &=0 \\ \therefore t &=\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a^2} \quad (\because t>0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と求まる。

$$\frac{1}{\sin \theta}-\frac{1}{\cos \theta}=a$$

の両辺に $\sin \theta \cos \theta$ をかけて,

$$\cos \theta-\sin \theta=a \sin \theta \cos \theta$$

となるので, 上式に①を代入して,

$$\begin{aligned} \cos \theta-\sin \theta &=a \cdot \frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a^2} \\ &=\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta-\sin \theta=\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}$$

(ii)

①より,

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \theta &=\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a^2} \\ \Leftrightarrow \sin 2 \theta &=2 \cdot \frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a^2} \end{aligned}$$

と変形できるので, $a=\frac{4}{3}$ のとき,

$$\begin{aligned} \sin 2 \theta &=2 \cdot \frac{-1+\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} \\ &=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

である。したがって, 3倍角の公式より,

$$\begin{aligned} \sin 6 \theta &=3 \sin 2 \theta-4 \sin ^3 2 \theta \\ &=3 \cdot \frac{3}{4}-4 \cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ &=\frac{9}{4}-\frac{27}{16} \\ &=\frac{9}{16} \end{aligned}$$

と求まる。よって,

$$\begin{aligned} \sin 6 \theta-\sin 6 \cdot 25^{\circ} &=\sin 6 \theta-\sin 150^{\circ} \\ &=\frac{9}{16}-\frac{1}{2} \\ &=\frac{1}{16} \\ &>0 \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} \sin 2 \theta &=\frac{3}{4}=0.75 \\ \sin 45^{\circ} &=\frac{1}{\sqrt{2}}=0.707 \cdots \\ \sin 60^{\circ} &=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866 \cdots \end{aligned}$$

かつ, $0^{\circ}<2 \theta<90^{\circ}$ であるから,

$$\begin{aligned} 45^{\circ} &<2 \theta<60^{\circ} \\ \Leftrightarrow 135^{\circ} &<6 \theta<180^{\circ} \end{aligned}$$

となる。 $135^{\circ}<x<180^{\circ}$ において $\sin x$ は単調減少するから, $\sin 6 \theta-\sin 150^{\circ}>0$ より,

$$6 \theta<150^{\circ}$$

であることがわかる。よって,

$$\theta<25^{\circ}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \theta<25^{\circ}$$

(3)

(i)

ルートの中身は0以上である必要があるから、

$$\begin{aligned}2x-x^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x(x-2) &\leq 0 \\ \therefore 0 \leq x &\leq 2\end{aligned}$$

が成り立つ。これが $f(x)$ の定義域である。

(答) $0 \leq x \leq 2$

(ii)

$f(x)$ の定義域が $0 \leq x \leq 2$ であるから、 $g(x)=xf(x)$ の定義域もまた $0 \leq x \leq 2$ である。

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \cdot (2-2x) \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}g'(x) &= f(x) + xf'(x) \\ &= \sqrt{2x-x^2} + \frac{x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}} \\ &= \frac{(2x-x^2) + (x-x^2)}{\sqrt{2x-x^2}} \\ &= \frac{3x-2x^2}{\sqrt{2x-x^2}} \\ &= -\frac{x(2x-3)}{\sqrt{2x-x^2}}\end{aligned}$$

と計算できる。

$$\begin{aligned}g(0) &= 0 \\ g(2) &= 0 \\ g\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

より、 $g(x)$ の増減表は下の通りである。

x	0	...	$\frac{3}{2}$	...	2
$g'(x)$	0	+	0	-	
$g(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

したがって $g(x)$ は

$$\begin{aligned}x = \frac{3}{2} \text{ のとき最大値 } &\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ x = 0, 2 \text{ のとき、最小値 } &0\end{aligned}$$

をとる。

(答) 最大値: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 最小値: 0

(iii)

$$g(x)-f(x)=(x-1)\sqrt{2x-x^2}$$

であるから、 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は $x=0, 1, 2$ で交わる。

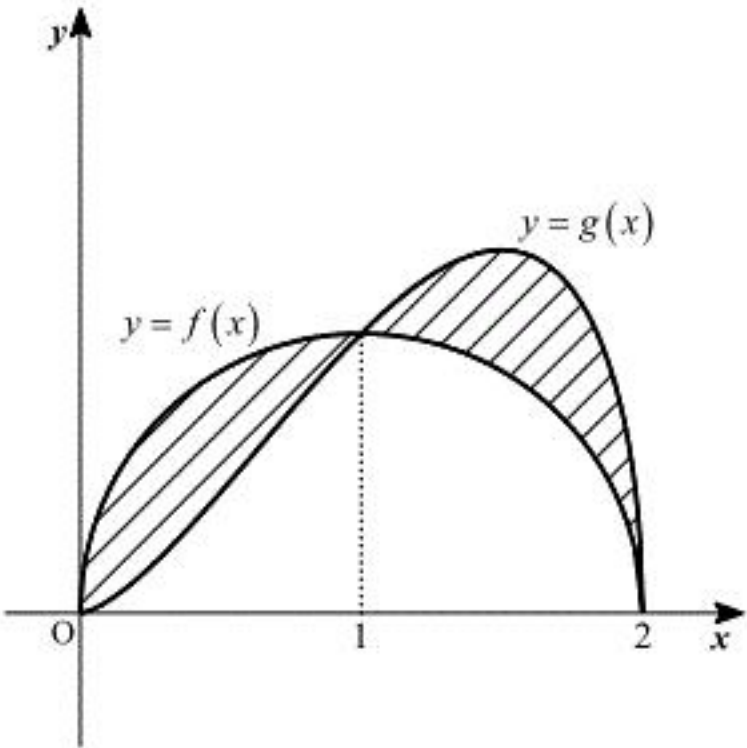
また、 $0 \leq x \leq 1$ のとき、

$$g(x)-f(x) \leq 0$$

であり、 $1 \leq x \leq 2$ のとき、

$$g(x)-f(x) \geq 0$$

であることがわかる。したがって、求める面積は下図の斜線部の面積である。



求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned}S &= \int_0^1 \{f(x)-g(x)\} dx + \int_1^2 \{g(x)-f(x)\} dx \\ &= \int_0^1 (1-x)\sqrt{2x-x^2} dx + \int_1^2 (x-1)\sqrt{2x-x^2} dx\end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $2x-x^2=t$ とおくと、

$$\begin{aligned}(2-2x)dx &= dt \\ \therefore dx &= \frac{1}{2(1-x)} dt\end{aligned} \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \hline t & 0 \rightarrow 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & 1 \rightarrow 2 \\ \hline t & 1 \rightarrow 0 \end{array}$$

であるから、

$$\begin{aligned}S &= \int_0^1 (1-x)\sqrt{t} \frac{1}{2(1-x)} dt + \int_1^0 (x-1)\sqrt{t} \frac{1}{2(1-x)} dt \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{t} dt \right) \times 2 \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{2}{3}$