

(1)

(i)

$f(x)$ を変形すると,

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 2ax \\ &= (x-a)^2 - a^2\end{aligned}$$

となるので, $y = f(x)$ のグラフの頂点は,

$$(a, -a^2)$$

である。

(答) $(a, -a^2)$

(ii)

$$\begin{aligned}f(x) - x &= x^2 - 2ax - x \\ &= x^2 - (2a+1)x \\ &= x\{x - (2a+1)\}\end{aligned}$$

である。 $a > -\frac{1}{2}$ より,

$$2a+1 > 0$$

であるので,

$$f(x) \geq x$$

$$\Leftrightarrow x\{x - (2a+1)\} \geq 0$$

$$\therefore x \leq 0, 2a+1 \leq x$$

と求まる。

(答) $x \leq 0, 2a+1 \leq x$

(iii)

$$f(x) = (x-a)^2 - a^2$$

であるから, $y = f(x)$ は $x = a$ を軸とする下に凸の放物線を表す。

[1] $-\frac{1}{2} < a \leq 0$ のとき

軸 $x = a$ は範囲 $x \leq 0, 2a+1 \leq x$ に含まれるので, $f(x)$ の最小値は

$$f(a) = -a^2$$

となる。

[2] $a > 0$ のとき

範囲 $x \leq 0, 2a+1 \leq x$ のうち, 軸 $x = a$ に最も近いのは $x = 0$ である。よって, $f(x)$ の最小値は

$$f(0) = 0$$

となる。

以上[1], [2]より, 求める最小値は

$$\begin{cases} -a^2 & (-\frac{1}{2} < a \leq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (a > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

(答)

$$\begin{cases} -a^2 & (-\frac{1}{2} < a \leq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (a > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

(i)

$$\overrightarrow{OB} = \frac{4}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{3}{2} \overrightarrow{OC}$$

の両辺を2乗すると

$$|\overrightarrow{OB}|^2 = \frac{16}{9} |\overrightarrow{OA}|^2 + 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{9}{4} |\overrightarrow{OC}|^2$$

となる。 $|\overrightarrow{OA}|=3, |\overrightarrow{OB}|=6, |\overrightarrow{OC}|=2$ であるから、これらを上式に代入して、

$$36 = 16 + 4 \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + 9$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{11}{4}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{11}{4}$$

(ii)

点PはABを2:1に内分するので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{3}{2} \overrightarrow{OC} \right) \\ &= \frac{11}{9} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

と表せる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{11}{9} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$$

(iii)

(ii)より、

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = \frac{121}{81} |\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{22}{9} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2$$

と表せる。これに(i)の結果を代入すると

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}|^2 &= \frac{121}{81} \cdot 3^2 + \frac{22}{9} \cdot \frac{11}{4} + 2^2 \\ &= \frac{145}{6} \end{aligned}$$

となるので、

$$|\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{870}}{6}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad |\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{870}}{6}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= \frac{4}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{3}{2} \overrightarrow{OC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} &= \frac{3}{4} \overrightarrow{OB} - \frac{9}{8} \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \frac{5}{6} \overrightarrow{OA} + \frac{17}{16} \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{5}{6} \left(\frac{3}{4} \overrightarrow{OB} - \frac{9}{8} \overrightarrow{OC} \right) + \frac{17}{16} \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{5}{8} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{8} \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ の係数に注目すると、

$$\frac{5}{8} > 0, \frac{1}{8} > 0$$

かつ

$$\frac{5}{8} + \frac{1}{8} < 1$$

であるから、点Qは△OBCの内部にある。

したがって、点Qは四角形OABCの内部にあることが示された。

(証明終)