

(1)

(1)

$f(x) = x^2 - 2ax + 2a + 3$ とおく。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2ax + 2a + 3 \\ &= (x-a)^2 - a^2 + 2a + 3 \end{aligned}$$

であるので求める a の範囲の条件は以下の 3 つの不等式である。

$$f(a) < 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$1 < a < 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$f(1) \geq 0 \text{ かつ } f(5) \geq 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

よって、 $\textcircled{1}$ から

$$\begin{aligned} -a^2 + 2a + 3 &< 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)(a-3) &> 0 \\ \therefore a &< -1, a > 3 \end{aligned}$$

となる。次に

$$f(1) = 4 > 0$$

であるので、 $\textcircled{3}$ の条件は

$$f(5) = -8a + 28 \geq 0$$

となる。よって

$$a \leq \frac{7}{2}$$

となる。以上より求める a の範囲は

$$3 < a \leq \frac{7}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 3 < a \leq \frac{7}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned} 4x^4 + 7x^2 + 16 &= (2x^2 + 4)^2 - 9x^2 \\ &= (2x^2 - 3x + 4)(2x^2 + 3x + 4) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3 \pm \sqrt{23}i}{4} \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-3 \pm \sqrt{23}i}{4} \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} 4x^4 + 7x^2 + 16 &= (2x^2 + 4)^2 - 9x^2 \\ &= (2x^2 - 3x + 4)(2x^2 + 3x + 4) \\ &= 4 \left(x - \frac{3 + \sqrt{23}i}{4} \right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{23}i}{4} \right) \left(x - \frac{-3 + \sqrt{23}i}{4} \right) \left(x - \frac{-3 - \sqrt{23}i}{4} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 4 \left(x - \frac{3 + \sqrt{23}i}{4} \right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{23}i}{4} \right) \left(x - \frac{-3 + \sqrt{23}i}{4} \right) \left(x - \frac{-3 - \sqrt{23}i}{4} \right)$$

(2)

(i)

$\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (x, y, z)$ とおく。また, $\vec{u}$, $\vec{v}$ のなす角を θ とおく。このとき

$$|\vec{u}||\vec{v}| \geq |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つので

$$|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

であることから

$$\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \geq (ax+by+cz)$$

となる。よって

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$$

が成り立つ。

(証明終)

(ii)

①から $\cos\theta=0$ のとき等号が成立する。このとき $\vec{u}$, $\vec{v}$ は互いに平行な位置関係となるので

$$a:b:c=x:y:z$$

となる。

(答) $a:b:c=x:y:z$ が成り立つとき。

(iii)

$25 \cdot 36 = 30^2$ より, このとき $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ の不等式において等号

が成立する。よって(ii)から $a:b:c=x:y:z$ が成り立つことが分かる。よって $\vec{u} = k\vec{v}$ とおくと

$a=kx, b=ky, c=kz$ が成り立つ。よって, このとき

$$\frac{a+b+c}{x+y+z} = k$$

となる。ここで

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = k\vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow ax+by+cz = k(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Leftrightarrow 30 = k(36)$$

$$\therefore k = \frac{5}{6}$$

となるので

$$\frac{a+b+c}{x+y+z} = \frac{5}{6}$$

となる。

(答) $\frac{5}{6}$

(3)

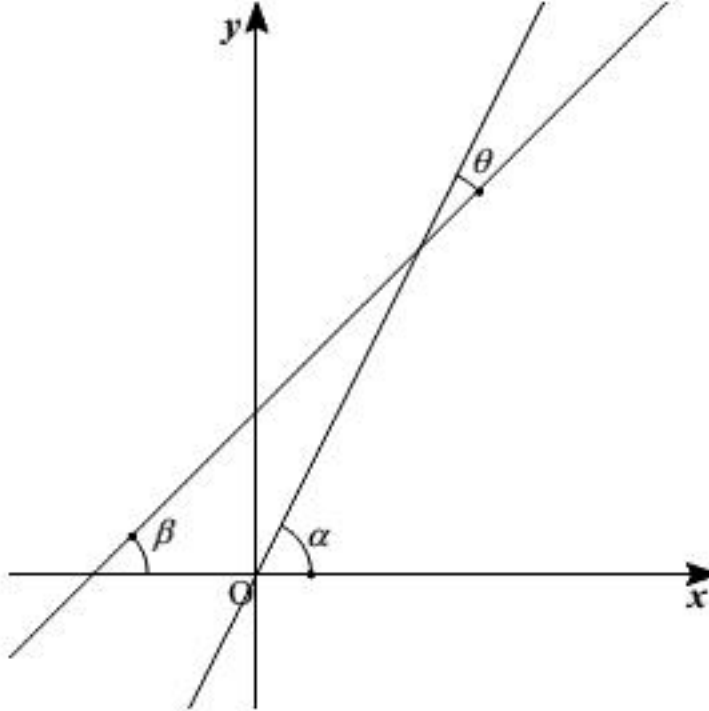
(i)

①

a, b は共に 1 以上の自然数であるので

$$b+1>\frac{1}{a}>0$$

が成り立つ。これより、下図のように角 α, β をおけば、鋭角 θ は下図の角である。



このとき

$$\theta=\alpha-\beta$$

である。よって加法定理から

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\tan \alpha-\tan \beta}{1+\tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{b+1-\frac{1}{a}}{1+(b+1) \frac{1}{a}} \\ &= \frac{a(b+1)-1}{a+b+1}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{a(b+1)-1}{a+b+1}$

②

$a+b+1>0$ に注意すると①の結果から

$$\begin{aligned}\tan \theta &\leq 1 \\ \Leftrightarrow a(b+1)-1 &\leq a+b+1 \\ \therefore(a-1) b &\leq 2\end{aligned}$$

となる。これをみたす (a, b) の組は

$$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(3,1)$$

の 9 通りであり、 (a, b) の組は全体で $6 \cdot 6=36$ 通りであることから求める確率は

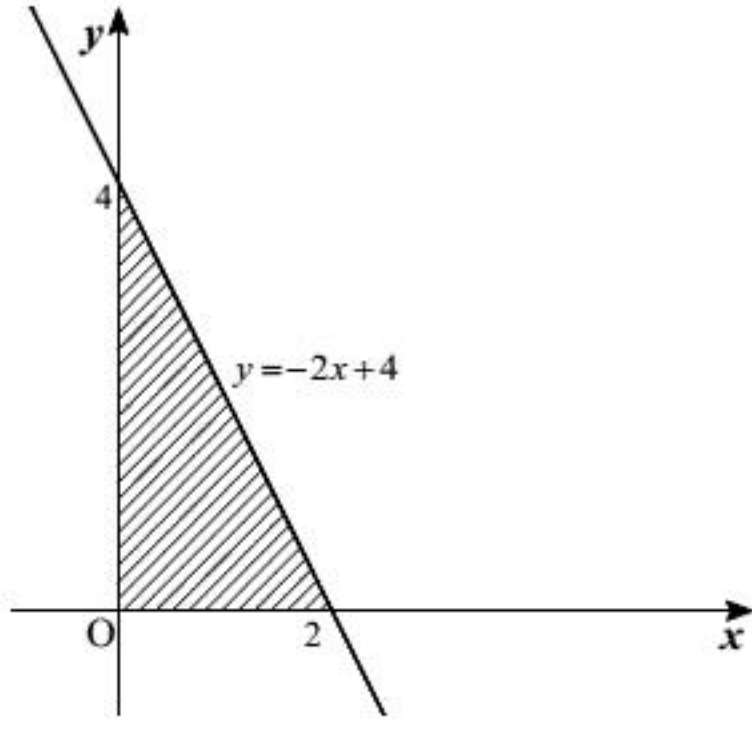
$$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

となる。

(答) $\frac{1}{4}$

(ii)

領域 D は下図の斜線部となる。



ここで

$$\frac{b}{a} x+y=k$$

とおくと、

$$y=-\frac{b}{a} x+k$$

となる。したがって、

直線 $y=-\frac{b}{a} x+k$ のグラフが領域 D と共有点を持っていて、 y 切片が最大となる
とき、 k は最大となる。・・・**A**

$\frac{b}{a} \leq 2$ のとき

$$-\frac{b}{a} \geq-2$$

であるので図と **A** より、 $y=-\frac{b}{a} x+k$ が点 $(0,4)$ を通るとき k は最大となる。よって

$$M=4$$

となる。

(答) 4

②

$\frac{b}{a}>2$ であるとき

$$-\frac{b}{a}<-2$$

であるので図と **A** より、 $y=-\frac{b}{a} x+k$ が点 $(2,0)$ を通るとき k は最大となる。よって

$$M=2 \cdot \frac{b}{a}+0=\frac{2 b}{a}$$

となる。

(答) $\frac{2 b}{a}$

③

$\frac{b}{a}>2$ となる (a, b) の組は

$$(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)$$

の 6 通りであり、このときの $M=\frac{2 b}{a}$ の値はそれぞれ

$$6,8,10,12,5,6$$

であり、さらに余事象から $M=4$ となるのは 30 通りであることが分かる。よって求める期待値は

$$\begin{aligned}4 \cdot \frac{30}{36}+5 \cdot \frac{1}{36}+6 \cdot \frac{2}{36}+8 \cdot \frac{1}{36}+10 \cdot \frac{1}{36}+12 \cdot \frac{1}{36} &= \frac{1}{36}(120+5+12+8+10+12) \\ &= \frac{167}{36}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{167}{36}$