

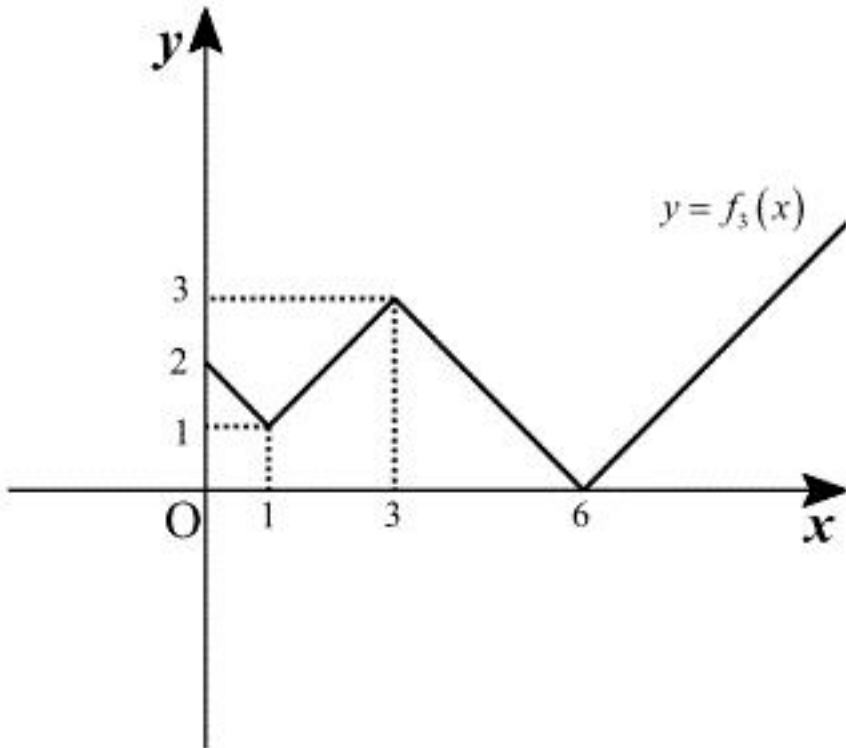
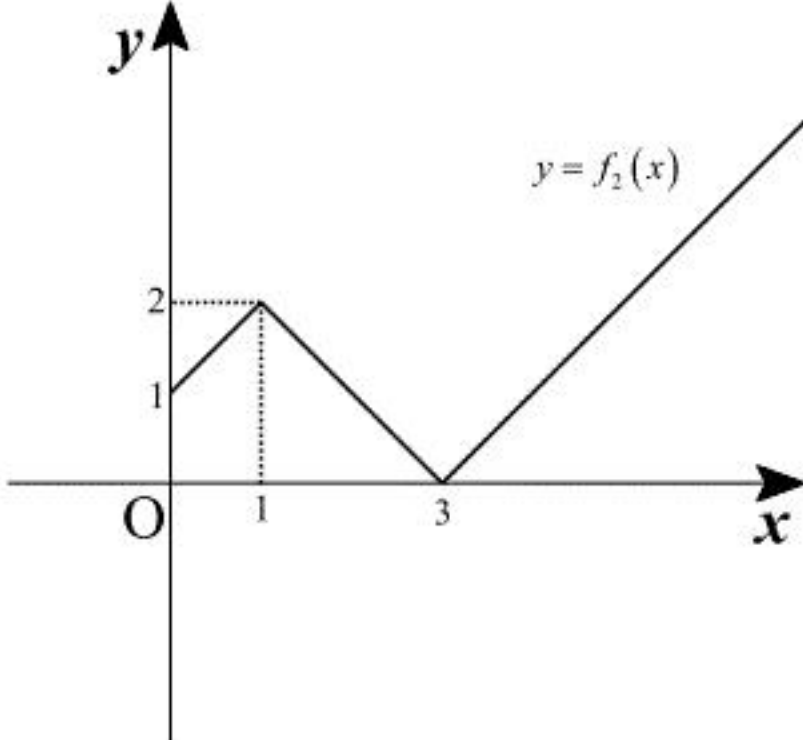
(1)

(i)

仮定より

$$\begin{aligned} f_2(x) &= ||x-1|-2| \\ f_3(x) &= ||x-1|-2|-3| \end{aligned} \quad (x \geq 0)$$

となる。よってグラフは下の図の通り。



(答) 前図

(ii)

自然数 k に対し、

$$a_{2k} = a_{2k-1} = k \quad \dots \textcircled{1}$$

であることを k についての数学的帰納法で示す。 $k=1$ のとき

$$\begin{aligned} a_1 &= |0-1| = 1 \\ a_2 &= |1-2| = 1 \end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ 式は成立する。 $k=m$ のとき、 $\textcircled{1}$ 式が成り立つと仮定する。いま

$$a_{n+1} = |a_n - (n+1)|$$

であるから、このとき

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= |a_{2m} - (2m+1)| \\ &= |m - (2m+1)| \\ &= m+1 \\ a_{2m+2} &= |a_{2m+1} - (2m+2)| \\ &= |m+1 - (2m+2)| \\ &= m+1 \end{aligned}$$

となり、 $\textcircled{1}$ 式は $k=m+1$ のときも成り立つ。よって $\textcircled{1}$ 式は任意の自然数 k について成り立つから、

$$\begin{aligned} n \text{ が奇数のとき, } a_n &= \frac{n+1}{2} \\ n \text{ が偶数のとき, } a_n &= \frac{n}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) n が奇数のとき, $a_n = \frac{n+1}{2}$

n が偶数のとき, $a_n = \frac{n}{2}$

(iii)

$n=1$ のとき題意は明らかに成り立つから、 $n>1$ のときについて題意

$$f_{n-i}(\alpha) = in - \frac{i(i-1)}{2} \quad (1 \leq i \leq n-1) \quad \dots \textcircled{2}$$

を i に関する数学的帰納法で示す。 $i=1$ のとき

$$\begin{aligned} f_n(\alpha) &= |f_{n-1}(\alpha) - n| = 0 \\ \Leftrightarrow f_{n-1}(\alpha) &= n = 1 \cdot n - \frac{1 \cdot (1-1)}{2} \end{aligned}$$

となるから、 $\textcircled{2}$ 式は成り立つ。 $i=j$ ($1 \leq j \leq n-2$) のとき $\textcircled{2}$ 式が成り立つと仮定する。このとき

$$\begin{aligned} f_{n-j}(\alpha) &= jn - \frac{j(j-1)}{2} \\ \Leftrightarrow |f_{n-j-1}(\alpha) - (n-j)| &= jn - \frac{j(j-1)}{2} \\ \therefore f_{n-j-1}(\alpha) &= n-j \pm \left\{ jn - \frac{j(j-1)}{2} \right\} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{3}$ 式の複号のうち、負のほう成り立つとすると

$$\begin{aligned} f_{n-j-1}(\alpha) &= n-j - \left\{ jn - \frac{j(j-1)}{2} \right\} \\ &= -(j-1)n + \frac{j(j-1)}{2} - j \\ &= -\frac{1}{2}(2n-j)(j-1) - j < 0 \end{aligned}$$

($\because 2n-j > 0, j-1 \geq 0$)

となるが、これは $f_{n-j-1}(x)$ が絶対値で定義される関数であることに反する。よって $\textcircled{3}$ の複号のうち、正の方のみ成り立つから、

$$\begin{aligned} f_{n-j-1}(\alpha) &= n-j + \left\{ jn - \frac{j(j-1)}{2} \right\} \\ &= (j+1)n - \frac{(j+1)\{(j+1)-1\}}{2} \end{aligned}$$

となり、 $\textcircled{2}$ 式は $i=j+1$ のときも成り立つ。よって題意は示された。

(証明終)

(iv)

(iii)より、 $f_n(\alpha)=0$ を満たす α は全て $\textcircled{2}$ 式を満たす。ここで $\textcircled{2}$ において $i=n-1$ とすれば

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= n(n-1) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(n-1)(n+2) \end{aligned}$$

が得られる。さらに $f_1(x)=|x-1|$ より

$$f_1(\alpha) = |\alpha-1|$$

が得られるから、以上2式より

$$\begin{aligned} |\alpha-1| &= \frac{1}{2}(n-1)(n+2) \\ \therefore \alpha &= 1 + \frac{1}{2}(n-1)(n+2) \quad (\because \alpha \geq 0) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\alpha = 1 + \frac{1}{2}(n-1)(n+2)$

(2)

(i)

$k=2$ のとき, 2 つの曲線

$$y=f(x)=e^x \sin 9x$$

$$y=g(x)=e^x \sin x$$

の交点の x 座標は, この 2 式を連立して解くことによって

$$e^x \sin 9x = e^x \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 9x = \sin x (\because e^x > 0)$$

$$\Leftrightarrow 9x = x + 2n\pi, 9x = (2n+1)\pi - x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{n}{4}\pi, \frac{2n+1}{10}\pi$$

となる(ただし n は整数)。 $0 \leq x \leq \pi$ であるから, 求める値は

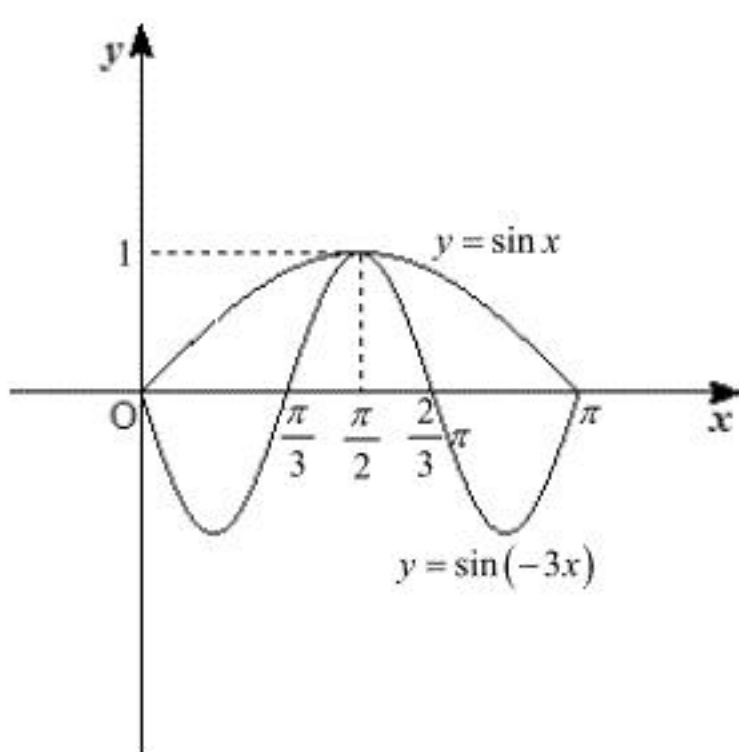
$$x=0, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{10}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{7}{10}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{9}{10}\pi, \pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad x=0, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{10}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{7}{10}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{9}{10}\pi, \pi$$

(ii)

$k=-1$ のとき, $f(x)=e^x \sin(-3x)$ である。ここで $y=\sin x, y=\sin(-3x)$ ($0 \leq x \leq \pi$) のグラフは以下のようになるため, $0 \leq x \leq \pi$ で $\sin x \geq \sin(-3x)$ である。



よって

$$\sin x \geq \sin(-3x)$$

$$\Leftrightarrow e^x \sin x \geq e^x \sin(-3x) (\because e^x > 0)$$

$$\therefore g(x) \geq f(x)$$

であり, $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標は上の図より, $x=0, \frac{\pi}{2}, \pi$ である。よって求める面積は

$$\int_0^\pi e^x \{\sin x - \sin(-3x)\} dx = \int_0^\pi e^x (\sin x + \sin 3x) dx$$

であり,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^x \sin x &= \frac{1}{2} [e^x (\sin x - \cos x)]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2} (e^\pi + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^x \sin 3x &= \frac{1}{10} [e^x (\sin 3x - 3 \cos 3x)]_0^\pi \\ &= \frac{3}{10} (e^\pi + 1) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^x \{\sin x - \sin(-3x)\} dx &= \int_0^\pi e^x (\sin x + \sin 3x) dx \\ &= \frac{1}{2} (e^\pi + 1) + \frac{3}{10} (e^\pi + 1) \\ &= \frac{4}{5} (e^\pi + 1) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{5} (e^\pi + 1)$$

(iii)

題意はつまり, 任意の自然数 k について $f(\alpha)=g(\alpha)$, $f'(\alpha)=g'(\alpha)$ を同時に満たす α があることを示せ, ということになる。ここで

$$f'(x)=e^x \{\sin(4k+1)x + (4k+1)\cos(4k+1)x\}$$

$$g'(x)=e^x (\sin x + \cos x)$$

であり,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) + (4k+1)\cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right\} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) = e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=g\left(\frac{\pi}{2}\right), f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

となる。よって α として $\frac{\pi}{2}$ がとれるので, 題意は示された。

(証明終)

(3)

(i)

仮定より

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = (1, -1, -2) + (-2, 4, 5) = (-1, 3, 3)$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR} = (-1, 3, 3) + (2, 1, 1) = (1, 4, 4)$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RS} = (1, 4, 4) + (-3, -4, -2) = (-2, 0, 2)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad Q(-1, 3, 3), R(1, 4, 4), S(-2, 0, 2)$$

(ii)

直線 $P'Q'$ と直線 $R'S'$ の方程式はそれぞれ

$$P'Q': y = \frac{-1-3}{1+1}(x-1)-1 = -2x+1$$

$$R'S': y = \frac{4}{1+2}(x+2) = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$$

であるから、交点 M' の座標は

$$\begin{cases} y = -2x+1 \\ -2x+1 = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \end{cases}$$
$$\therefore (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad M' \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$$

(iii)

実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{PQ} = (1-2s, -1+4s, -2+5s)$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OR} + t\overrightarrow{RS} = (1-3t, 4-4t, 4-2t)$$

と表される。仮定より、

$$\begin{cases} 1-2s = 1-3t \\ -1+4s = 4-4t \end{cases}$$
$$\therefore s = \frac{3}{4}, t = \frac{1}{2}$$

となるから、2点 M_1, M_2 の座標は

$$M_1\left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{4}\right), M_2\left(-\frac{1}{2}, 2, 3\right)$$

となる。よって2点間の距離は

$$3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{4}$$

(iv)

仮定より、 $\overrightarrow{PH}$ は $\overrightarrow{PX}$ の $\overrightarrow{PQ}$ への正射影ベクトルであるから、

$$\overrightarrow{PH} = \frac{\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|^2} \overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PQ}}{45} \overrightarrow{PQ}$$

と表される。

[1] X が線分 QR 上にあるとき

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PQ} + u_1 \overrightarrow{QR} \quad (0 \leq u_1 \leq 1) \text{ と表されるから、}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} &= \frac{(\overrightarrow{PQ} + u_1 \overrightarrow{QR}) \cdot \overrightarrow{PQ}}{45} \overrightarrow{PQ} \\ &= \left(1 + \frac{1}{9}u_1\right) \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

となる。よって X が点 Q から点 R まで動くとき、 u_1 は0から1まで増加するので、 H は

$$\overrightarrow{PQ} \text{ と同じ向きに点 } Q \text{ から点 } H_1 \text{ まで移動する。ただし } H_1 \text{ は } \overrightarrow{PH_1} = \frac{10}{9} \overrightarrow{PQ} \text{ を満たす点}$$

である。

[2] X が線分 RS 上にあるとき

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + u_2 \overrightarrow{RS} \quad (0 \leq u_2 \leq 1) \text{ と表されるから、}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} &= \frac{(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + u_2 \overrightarrow{RS}) \cdot \overrightarrow{PQ}}{45} \overrightarrow{PQ} \\ &= \left(\frac{10}{9} - \frac{4}{9}u_2\right) \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

となる。よって X が点 R から点 S まで動くとき、 u_2 は0から1まで増加するので、 H は

$$\overrightarrow{PQ} \text{ と逆向きに点 } H_1 \text{ から点 } H_2 \text{ まで移動する。ただし } H_2 \text{ は } \overrightarrow{PH_2} = \frac{2}{3} \overrightarrow{PQ} \text{ を満たす点で}$$

ある。

[3] X が線分 SP 上にあるとき

$$\overrightarrow{PX} = (1-u_3) \overrightarrow{PS} = (1-u_3)(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS}) \quad (0 \leq u_3 \leq 1) \text{ と表されるから、}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} &= \frac{(1-u_3)(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS}) \cdot \overrightarrow{PQ}}{45} \overrightarrow{PQ} \\ &= \frac{2}{3}(1-u_3) \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

となる。よって X が点 S から点 P まで動くとき、 u_3 は0から1まで増加するので、 H は

$$\overrightarrow{PQ} \text{ と逆向きに点 } H_2 \text{ から点 } P \text{ まで移動する。}$$

[1]~[3]より、点 H が $\overrightarrow{PQ}$ と同じ向きに動いた距離の総和は

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PH_1} - \overrightarrow{PQ}| &= \left|\frac{1}{9} \overrightarrow{PQ}\right| \\ &= \frac{1}{9} \cdot \sqrt{45} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

となり、点 H が $\overrightarrow{PQ}$ と逆向きに動いた距離の総和は

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PH_1}| &= \left|\frac{10}{9} \overrightarrow{PQ}\right| \\ &= \frac{10}{9} \cdot \sqrt{45} \\ &= \frac{10}{3} \sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{点 } H \text{ が } \overrightarrow{PQ} \text{ と同じ向きに動いた距離の総和: } \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{点 } H \text{ が } \overrightarrow{PQ} \text{ と逆向きに動いた距離の総和: } \frac{10}{3} \sqrt{5}$$