

(1)

(i)

直線 ℓ の方程式は

$$y = mx - 1$$

であるから、点 Q の x 座標は

$$x^2 + (mx - 1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 1)x^2 - 2mx = 0$$

$$\Leftrightarrow x\{(m^2 + 1)x - 2m\} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2m}{m^2 + 1} \quad (\because P \neq Q \text{ より } x \neq 0)$$

である。よって

$$Q\left(\frac{2m}{m^2 + 1}, \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}\right)$$

となる。したがって点 Q における円 C_1 の接線 ℓ_1 は、円の接線の公式より

$$\ell_1: \frac{2m}{m^2 + 1}x + \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}y = 1$$

$$\Leftrightarrow 2mx + (m^2 - 1)y = m^2 + 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad Q\left(\frac{2m}{m^2 + 1}, \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}\right) \quad \text{接線: } 2mx + (m^2 - 1)y = m^2 + 1$$

(ii)

点 P, Q は直線 $\ell: y = mx - 1$ と円 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ を通るから、実数 k を用いて

$$x^2 + y^2 - 1 + k(mx - y - 1) = 0$$

と表される円は点 P, Q を通る。この円が原点を通るとき

$$-1 - k = 0$$

$$\therefore k = -1$$

となる。よって C_2 の方程式は

$$x^2 + y^2 - 1 - (mx - y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - mx + y = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x^2 + y^2 - mx + y = 0$$

(iii)

$m = \sqrt{3}$ のとき、 C_2 の方程式は

$$x^2 + y^2 - \sqrt{3}x + y = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

となるから、 C_2 は中心 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 、半径 1 の円である。 C_1, C_2 の半径は等しく、異なる 2 点

で交わるので、2 円に接する直線は原点と点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ を通る直線

$$x + \sqrt{3}y = 0$$

に平行である。よって求める直線は実数 r を用いて、

$$x + \sqrt{3}y + r = 0$$

と表される。この直線は C_1 に接するので、原点からの距離が 1 に等しく

$$\frac{|r|}{\sqrt{3+1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow r = \pm 2$$

となる。よって求める直線の方程式は

$$x + \sqrt{3}y \pm 2 = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x + \sqrt{3}y \pm 2 = 0$$

(2)

(i)

仮定より点Cは線分ABを $t:1-t$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OC} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

となる。

$$(答) \overrightarrow{OC} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

(ii)

$|\overrightarrow{OC}|=1$ であるので、(i)より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OC}|^2 &= (1-t)^2 |\overrightarrow{OA}|^2 + t^2 |\overrightarrow{OB}|^2 + 2t(1-t) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= (1-t)^2 + 4t^2 + 2t(1-t) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2t(1-t) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -5t^2 + 2t$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{2-5t}{2(1-t)}$$

となる。

$$(答) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{2-5t}{2(1-t)}$$

(iii)

仮定より

$$OA = AC = CO = 1$$

であるから $\triangle OAC$ は正三角形である。よって

$$\angle OCB = \pi - \angle OCA = \frac{2}{3}\pi$$

となる。ここで $\triangle OBC$ について余弦定理より

$$OB^2 = OC^2 + BC^2 - 2 \cdot OC \cdot BC \cos \angle OCB$$

$$\Leftrightarrow 4 = 1 + BC^2 + BC$$

$$\Leftrightarrow BC^2 + BC - 3 = 0$$

$$\therefore BC = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} (\because BC > 0)$$

となるから、

$$\begin{aligned} t &= \frac{AC}{AB} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}} \\ &= \frac{2}{1 + \sqrt{13}} \\ &= \frac{\sqrt{13} - 1}{6} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) t = \frac{\sqrt{13} - 1}{6}$$

(3)

(i)

与式より

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$= \sin x(1 + \cos x)$$

$$f'(x) = \cos x(1 + \cos x) - \sin^2 x$$

$$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$$

$$= (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$

となる。よって増減表は下の通りで

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π	...	$\frac{5}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
$f(x)$	0	/	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$	\	0	\	$-\frac{3}{4}\sqrt{3}$	/	0

最大値は $x = \frac{\pi}{3}$ のとき $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ ，最小値は $x = \frac{5}{3}\pi$ のとき $-\frac{3}{4}\sqrt{3}$ となる。

(答) 最大値: $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ ($x = \frac{\pi}{3}$)

最小値: $-\frac{3}{4}\sqrt{3}$ ($x = \frac{5}{3}\pi$)

(ii)

(i)より，求める体積は

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{2\pi} \left(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 dx &= \pi \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 2x + \sin x \sin 2x \right) dx \\ &= \pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{8} + 2 \sin^2 x \cos x \right) dx \\ &= \frac{\pi}{8} \int_0^{2\pi} (-4 \cos 2x - \cos 4x + 5 + 16 \sin^2 x \cos x) dx \\ &= \frac{\pi}{8} \left[-2 \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x + 5x + \frac{16}{3} \sin^3 x \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{5}{4} \pi^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{5}{4} \pi^2$