

(1)

会社員の3人を a, b, c , 3つの飲食店を A, B, C とする。

(i) ①

a から順に店を決めるものとしたとき、 a は好きな店を選び、 b は a と異なる店、 c は残りの店を選べばよいから、3人の選ぶ店が互いにすべて異なる確率は

$$1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

である。

(答) $\frac{2}{9}$

②

a から順に店を決めるとき、 a は好きな店を選び、 b, c は a と同じ店を選べばよいから、3人全員が同じ店を選ぶ確率は

$$1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

である。

(答) $\frac{1}{9}$

③

事象③は事象「①または②」の余事象であるため、2人は同じ店を選び、1人だけ別の店を選ぶ確率は

$$1 - \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{9} \right) = \frac{2}{3}$$

である。

(答) $\frac{2}{3}$

(ii)

月曜は3人全員が同じ店を選ぶことなく、火曜に3人全員が同じ店を選べばよいから、②の結果より、求める確率は

$$\left(1 - \frac{1}{9} \right) \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{81}$$

である。

(答) $\frac{8}{81}$

(iii)

「月曜、火曜、水曜の連続した三日間で、1日も3人全員が同じ店を選ばない」事象の余事象の確率を求めればよいから、求める確率は

$$1 - \left(1 - \frac{1}{9} \right)^3 = \frac{217}{729}$$

である。

(答) $\frac{217}{729}$

(2)

(i)

$$\begin{cases} (x+3)(x+8)=x^2+11x+24 \\ (x+4)(x+6)=x^2+10x+24 \\ (x+1)(x+24)=x^2+25x+24 \\ (x+2)(x+12)=x^2+14x+24 \end{cases}$$

であり、 $A=x^2+24$ とおくと、題意で与えられた式は

$$\begin{aligned} & 6(x+3)(x+4)(x+6)(x+8)-(x+1)(x+2)(x+12)(x+24) \\ &= 6(A+11x)(A+10x)-(A+25x)(A+14x) \\ &= 6(A^2+21xA+110x^2)-(A^2+39xA+350x^2) \\ &= 5A^2+87xA+310x^2 \\ &= (5A+62x)(A+5x) \end{aligned}$$

となる。よって、 $A=x^2+24$ を代入して、

$$\begin{aligned} & 6(x+3)(x+4)(x+6)(x+8)-(x+1)(x+2)(x+12)(x+24) \\ &= (5x^2+62x+120)(x^2+5x+24) \\ &= (x+10)(5x+12)(x^2+5x+24) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 6(x+3)(x+4)(x+6)(x+8)-(x+1)(x+2)(x+12)(x+24)=(x+10)(5x+12)(x^2+5x+24)$$

(ii)

2次方程式 $x^2-x+1=0$ の判別式を D とおくと、

$$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0$$

となるため、2次方程式 $x^2-x+1=0$ は2つの共役な虚数解をもつ。この虚数解を $\alpha, \bar{\alpha}$ とし、多項式 $f(x)$ を

$$f(x)=x^{2n}-4x^8+Ax+B$$

とおくと、 $f(x)$ は実数係数多項式であるため、

$$f(\alpha)=0 \Leftrightarrow f(\bar{\alpha})=0$$

を満たす。したがって、

$$\text{多項式 } f(x) \text{ が } x^2-x+1 \text{ で割り切れる} \Leftrightarrow f(\alpha)=0$$

が成り立つ。また、 α は

$$\begin{aligned} \alpha^2-\alpha+1 &= 0 \\ \therefore \alpha^2 &= \alpha-1 \end{aligned}$$

を満たし、また、

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= \alpha \cdot \alpha^2 \\ &= \alpha(\alpha-1) \quad (\because \alpha^2 = \alpha-1) \\ &= \alpha^2 - \alpha \\ &= (\alpha-1) - \alpha \quad (\because \alpha^2 = \alpha-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^{2n}-4\alpha^8+A\alpha+B \\ &= \alpha^{2n}-4\cdot \alpha^2 \cdot (\alpha^3)^2 + A\alpha+B \\ &= \alpha^{2n}-4\cdot (\alpha-1) \cdot (-1)^2 + A\alpha+B \quad (\because \alpha^2 = \alpha-1, \alpha^3 = -1) \\ &= \alpha^{2n} + (A-4)\alpha + B + 4 \end{aligned}$$

となるため、以下、 n の値によって場合分けをして考える。

[1] $n=3m-2$ (m は自然数) と表せるとき

このとき、

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^{2(3m-2)} + (A-4)\alpha + B + 4 \\ &= \alpha^2 \cdot (\alpha^3)^{2(m-1)} + (A-4)\alpha + B + 4 \\ &= (\alpha-1) \cdot (-1)^{2(m-1)} + (A-4)\alpha + B + 4 \quad (\because \alpha^2 = \alpha-1, \alpha^3 = -1) \\ &= (A-3)\alpha + B + 3 \end{aligned}$$

となる。ここで、 A, B は整数である、すなわち、実数であるため、 $f(\alpha)=0$ となるのは

$$(A, B) = (3, -3)$$

のときである。このとき、 A, B は共に整数となる。

[2] $n=3m-1$ (m は自然数) と表せるとき

このとき、

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^{2(3m-1)} + (A-4)\alpha + B + 4 \\ &= \alpha \cdot (\alpha^3)^{2m-1} + (A-4)\alpha + B + 4 \\ &= \alpha \cdot (-1)^{2m-1} + (A-4)\alpha + B + 4 \quad (\because \alpha^3 = -1) \\ &= (A-5)\alpha + B + 4 \end{aligned}$$

となる。ここで、 A, B は整数である、すなわち、実数であるため、 $f(\alpha)=0$ となるのは

$$(A, B) = (5, -4)$$

のときである。このとき、 A, B は共に整数となる。

[3] $n=3m$ (m は自然数) と表せるとき

このとき、

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^{2\cdot 3m} + (A-4)\alpha + B + 4 \\ &= (\alpha^3)^{2m} + (A-4)\alpha + B + 4 \\ &= (-1)^{2m} + (A-4)\alpha + B + 4 \quad (\because \alpha^3 = -1) \\ &= (A-4)\alpha + B + 5 \end{aligned}$$

となる。ここで、 A, B は整数である、すなわち、実数であるため、 $f(\alpha)=0$ となるのは

$$(A, B) = (4, -5)$$

のときである。このとき、 A, B は共に整数となる。

以上、[1], [2], [3] より、 $f(x)$ が x^2-x+1 で割り切れるときの整数 A, B の値は

$$(A, B) = \begin{cases} (3, -3) & (n=3m-2) \\ (5, -4) & (n=3m-1) \\ (4, -5) & (n=3m) \end{cases}$$

である。ただし、 m は自然数である。

$$(\text{答}) \quad (A, B) = \begin{cases} (3, -3) & (n=3m-2) \\ (5, -4) & (n=3m-1) \\ (4, -5) & (n=3m) \end{cases}$$

ただし、 m は自然数

(3)

(i)

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 4a_n + 3 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} + 1 &= 4(a_n + 1)\end{aligned}$$

と変形できる。 $a_1 = 0$ より、数列 $\{a_n + 1\}$ は初項1、公比4の等比数列となるため、

$$\begin{aligned}a_n + 1 &= 4^{n-1} \\ \therefore a_n &= 4^{n-1} - 1\end{aligned}$$

を得る。また、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (4^{k-1} - 1) \\ &= \sum_{k=1}^n 4^{k-1} - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{4^n - 1}{4 - 1} - n \\ &= \frac{4^n - 3n - 1}{3}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = 4^{n-1} - 1, \quad \sum_{k=1}^n a_k = \frac{4^n - 3n - 1}{3}$$

(ii)

(i)の結果より、

$$a_2 = 4 - 1 = 3$$

となるため、

$$\begin{aligned}f_2(x) &= a_2 x^2 + a_2 + 1 \\ &= 3x^2 + 4\end{aligned}$$

である。よって、関数 $h(x)$ を $h(x) = f_2(x) - g(x)$ とおくと、

$$\begin{aligned}h(x) &= f_2(x) - g(x) \\ &= (3x^2 + 4) - (x^3 + 3x^2 - 9x + 4) \\ &= -x^3 + 9x \\ &= -x(x-3)(x+3)\end{aligned}$$

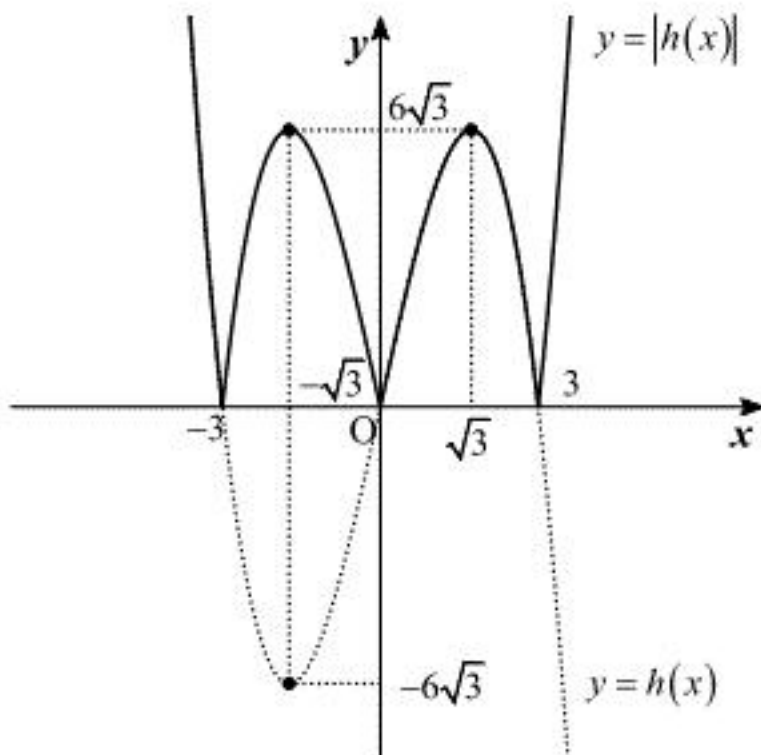
であり、導関数 $h'(x)$ は

$$\begin{aligned}h'(x) &= -3x^2 + 9 \\ &= -3(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})\end{aligned}$$

となるため、関数 $h(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\searrow$	$-6\sqrt{3}$	$\nearrow$	$6\sqrt{3}$	$\searrow$

よって、上の増減表より、関数 $y = |h(x)| = |f_2(x) - g(x)|$ のグラフは下図のようになる。



上図より、 $-3 \leq x \leq 3$ の範囲で関数 $y = |h(x)|$ は $x = \pm\sqrt{3}$ のとき最大値 $6\sqrt{3}$ をとる。

(答) $y = |f_2(x) - g(x)|$ のグラフ: 前図, y の値の最大値: $6\sqrt{3}$, そのときの x の値: $x = \pm\sqrt{3}$

(4)

(i)

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より, $\cos \theta \geq 0$ であるため, $\sin \theta = \frac{3}{4}$ のとき,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{4} \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \\ &= \frac{3\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

である。また, 三角関数の倍角の公式より

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{7}}{8} \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

であるため, $\sin 8\theta$ の値は

$$\begin{aligned}\sin 8\theta &= 2 \sin 4\theta \cos 4\theta \\ &= 4 \sin 2\theta \cos 2\theta (\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta) \\ &= 4 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \left\{ \left(-\frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{93\sqrt{7}}{512}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan \theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}, \sin 8\theta = \frac{93\sqrt{7}}{512}$$

(ii)

三角関数の半角の公式より

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos \theta}{2} \\ &= \frac{1 - t}{2}\end{aligned}$$

であり, また,

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta \\ &= 1 - t^2\end{aligned}$$

であるため, 題意で与えられた関数は

$$\begin{aligned}y &= -\frac{8}{9} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{4}{9} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{8}{9} \cdot \frac{1-t}{2} - \frac{4}{9} (1-t^2) + \frac{1}{2} \\ \therefore y &= \frac{4}{9} t^2 + \frac{4}{9} t - \frac{7}{18}\end{aligned}$$

と変形できる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{4}{9} t^2 + \frac{4}{9} t - \frac{7}{18}$$

(iii)

θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとき, t は $-1 \leq t \leq 1$ の範囲を動く。ここで, (ii)の結果より,

$$\begin{aligned}y &= \frac{4}{9} t^2 + \frac{4}{9} t - \frac{7}{18} \\ &= \frac{4}{9} \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となるため, $t=1$ のとき y は最大値 $\frac{1}{2}$ をとり, このときの θ は

$$\begin{aligned}t &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= 1 \\ \therefore \theta &= 0 \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi)\end{aligned}$$

である。また, $t=-\frac{1}{2}$ のとき, y は最小値 $-\frac{1}{2}$ をとり, このときの θ は

$$\begin{aligned}t &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= -\frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値: } \frac{1}{2} \quad (\theta=0 \text{ のとき}), \text{ 最小値: } -\frac{1}{2} \quad (\theta=\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \text{ のとき})$$

(5)

(i)

関数 $g_n(x) = e^{-n}(x-n)(n+1-x)$ の導関数 $g'_n(x)$ は

$$\begin{aligned} g'_n(x) &= e^{-n} \{ (n+1-x) - (x-n) \} \\ &= e^{-n} (2n+1-2x) \end{aligned}$$

であるため、 $g'_n(\alpha) = -g_n(\alpha)$ となるような実数 α ($n \leq \alpha \leq n+1$) は

$$\begin{aligned} g'_n(\alpha) &= -g_n(\alpha) \\ \Leftrightarrow e^{-n} (2n+1-2\alpha) &= -e^{-n} (\alpha-n)(n+1-\alpha) \\ \Leftrightarrow 2n+1-2\alpha &= \alpha^2 - (2n+1)\alpha + n^2 + n \\ \Leftrightarrow \alpha^2 - (2n-1)\alpha + n^2 - n - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{2n-1 \pm \sqrt{(2n-1)^2 - 4(n^2-n-1)}}{2} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{2n-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \therefore \alpha &= n + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \left(\because n \leq \alpha \leq n+1, 0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1 \right) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = n + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(ii)

曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g_n(x)$ について、

$$\begin{cases} f(t) = g_n(t) \\ f'(t) = g'_n(t) \end{cases}$$

を満たす実数 t が存在するような正の実数 c の条件を求めればよい。ここで、 $f(x) = ce^{-x}$ の導関数は

$$f'(x) = -ce^{-x} = -f(x)$$

を満たすため、

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(t) = g_n(t) \\ f'(t) = g'_n(t) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = g_n(t) \\ -f(t) = g'_n(t) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = g_n(t) \\ g_n(t) = -g'_n(t) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $c > 0$ より $f(t) \geq 0$ であるため、 $f(t) = g_n(t)$ を満たすためには

$$g_n(t) \geq 0$$

となる必要があり、つまり、 $n \leq t \leq n+1$ を満たさなければならない。したがって、(i)の結果より、

$$g_n(t) = -g'_n(t) \Leftrightarrow t = \alpha$$

であり、このとき

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= g_n(\alpha) \\ \Leftrightarrow ce^{-\alpha} &= e^{-n} (\alpha-n)(n+1-\alpha) \\ \Leftrightarrow c &= e^{\left(n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)-n} \left\{ \left(n + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) - n \right\} \left\{ n+1 - \left(n + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \right\} \left(\because \alpha = n + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \\ \Leftrightarrow c &= e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \therefore c &= (\sqrt{5}-2)e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{cases} f(t) = g_n(t) \\ g_n(t) = -g'_n(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \alpha \\ c = (\sqrt{5}-2)e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \end{cases}$$

であるため、求める c の値は $c = (\sqrt{5}-2)e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad c = (\sqrt{5}-2)e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

(iii)

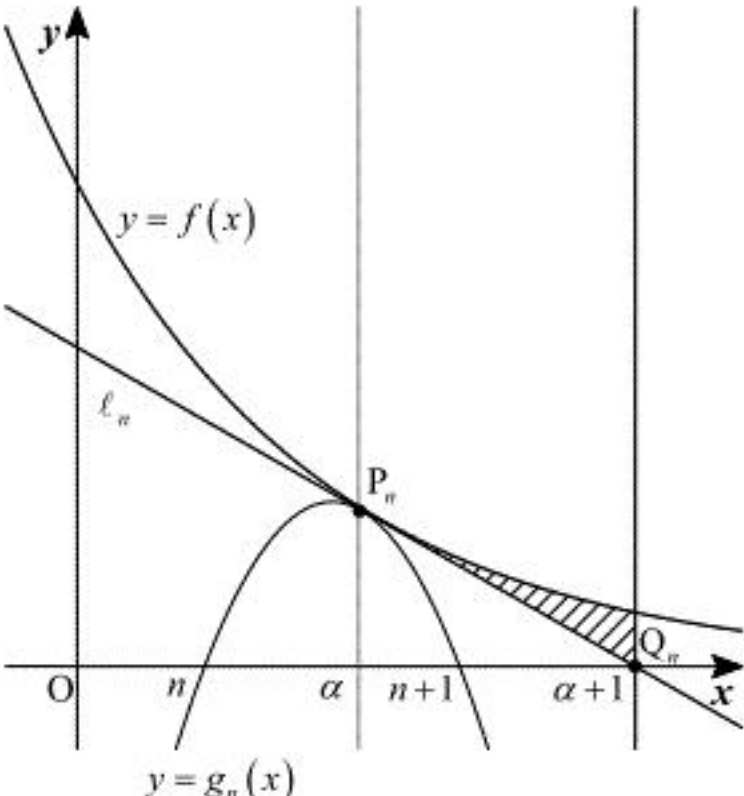
(ii)より、点 P_n の x 座標は α である。また、接線 ℓ_n の式は

$$y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$$

であり、 x 軸との交点 Q_n の x 座標は、

$$\begin{aligned} 0 &= -ce^{-\alpha} \cdot (x-\alpha) + ce^{-\alpha} \\ \therefore x &= \alpha + 1 \end{aligned}$$

となる。よって、各曲線のグラフの関係は以下の図のようになる。



上図より、面積 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x) dx - \frac{1}{2} \cdot (\alpha+1-\alpha) \cdot f(\alpha) \\ &= \left[-ce^{-x} \right]_{\alpha}^{\alpha+1} - \frac{1}{2} ce^{-\alpha} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right) ce^{-\alpha} \\ &= \frac{e-2}{2e} \cdot (\sqrt{5}-2)e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \cdot e^{\left(n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)-n} \left(\because \alpha = n + \frac{\sqrt{5}-1}{2}, c = (\sqrt{5}-2)e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{5}-2)(e-2)}{2e} e^{-n} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_0 + S_1 + \dots + S_n) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k$ は初項 $S_0 = \frac{(\sqrt{5}-2)(e-2)}{2e}$ 、公比 e^{-1} の無限等比級数となるから、 $0 < e^{-1} < 1$ より収束し、その値は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} S_k &= \frac{\frac{(\sqrt{5}-2)(e-2)}{2e}}{1-e^{-1}} \\ &= \frac{(\sqrt{5}-2)(e-2)}{2(e-1)} \end{aligned}$$

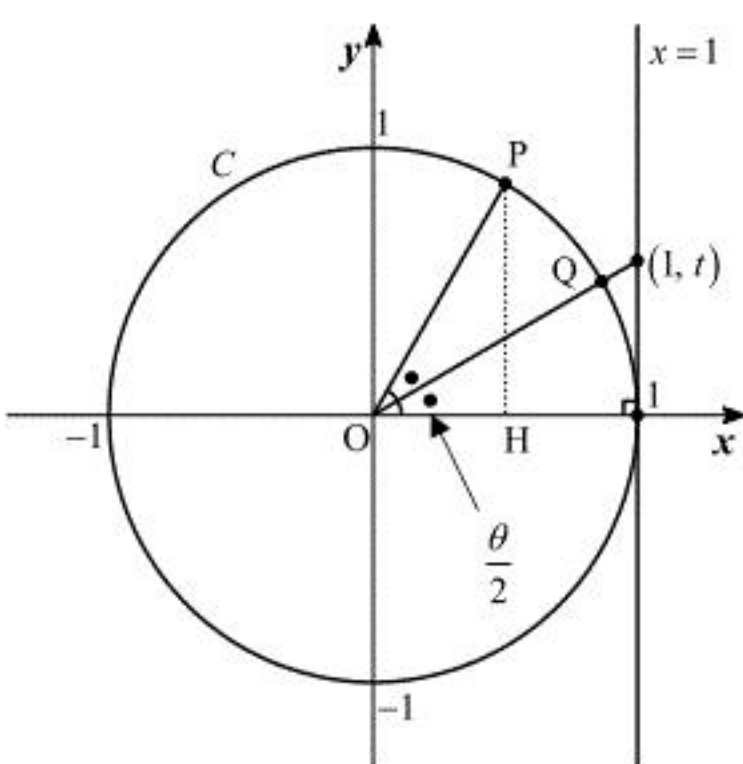
と求まる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=0}^{\infty} S_k = \frac{(\sqrt{5}-2)(e-2)}{2(e-1)}$$

(6)

(i)

円 C と直線 $x=1$ 、点 $P, Q, H, (1, t)$ の位置関係は下図の通りである。



上図より、

$$t = \tan \frac{\theta}{2}$$

である。ここで、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{4}$ であり、 $0 \leq t \leq 1$ である。よって、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2t}{1-t^2} \\ \cos \theta &= \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 \theta}} \left(\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} \\ &= \left| \frac{1-t^2}{1+t^2} \right| \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (\because 0 \leq t \leq 1) \\ \sin \theta &= \tan \theta \cdot \cos \theta \\ &= \frac{2t}{1-t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

となる。以上より、点 P の座標は

$$(\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

と求まる。

(答) $P \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$

(ii)

(i)の図より、 $\triangle OPH$ の三辺の長さの和は、

$$r(\theta) = 1 + \cos \theta + \sin \theta$$

である。よって、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{r(\theta)} \\ &= \frac{1}{1 + \cos \theta + \sin \theta} \end{aligned}$$

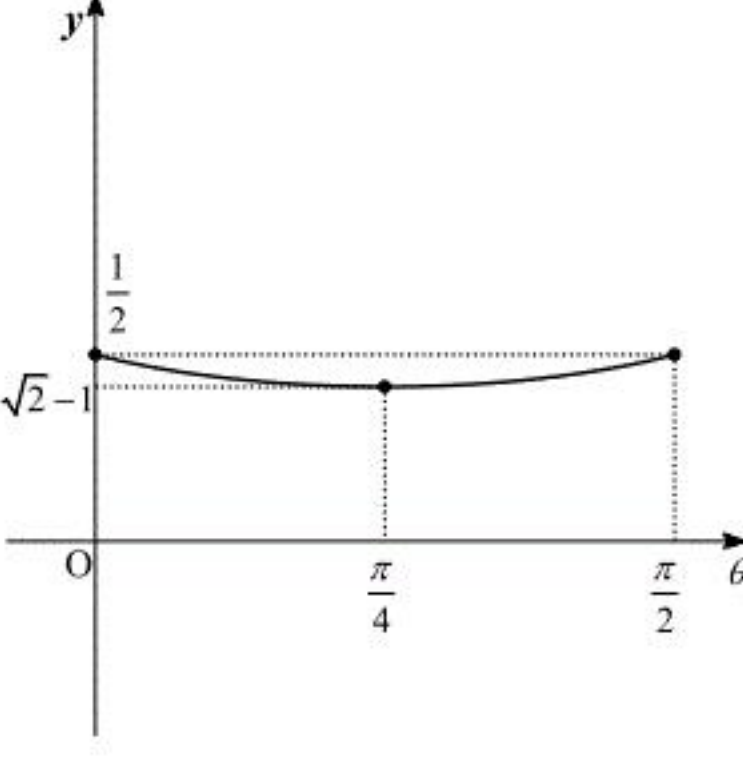
であり、これを微分すると

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\sin \theta - \cos \theta}{(1 + \cos \theta + \sin \theta)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)}{(1 + \cos \theta + \sin \theta)^2} \end{aligned}$$

となるため、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、 $y' = 0$ となり、関数 $y = \frac{1}{r(\theta)}$ の増減表は以下のようになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
y'		-	0	+	
y	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\sqrt{2}-1$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

上表より、関数 $y = \frac{1}{r(\theta)}$ のグラフは以下のようになる。



(答) 前図

(iii)

(i)の結果より、

$$\begin{aligned} r(\theta) &= 1 + \cos \theta + \sin \theta \\ &= 1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \\ &= \frac{2(1+t)}{1+t^2} \end{aligned}$$

であり、 $\tan \frac{\theta}{2} = t$ より、

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \Leftrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\rightarrow$	1

となるため、置換積分を用いて、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r(\theta)} d\theta &= \int_0^1 \frac{1+t^2}{2(1+t)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} \\ &= [\log(1+t)]_0^1 \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r(\theta)} d\theta = \log 2$