

(1)

さいころを投げたとき、各目の出方は同様に確からしいとする。このとき、さいころの目の出方は全部で $6^3 = 216$ 通りある。

(i)

和が 5 になるような出る目の組み合わせは

$$(1, 1, 3), (1, 2, 2)$$

の 2 組あり、目の出方はそれぞれ 3 通りあるから、出る目の和が 5 になる確率は

$$\frac{2 \times 3}{216} = \frac{1}{36}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{36}$$

(ii)

和が 10 になるような出る目の組み合わせは

$$(1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4)$$

の 6 組ある。このうち、 $(1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 3, 5)$ の目の出方はそれぞれ 6 通り、

$(2, 2, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 4)$ の目の出方は 3 通りあるから、出る目の和が 10 になる確率は

$$\frac{3 \times 6 + 3 \times 3}{216} = \frac{1}{8}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{8}$$

(iii)

出る目の和は 3 以上 18 以下であるから、このうち 5 の倍数であるのは 5, 10, 15 のいずれかとなる場合である。和が 15 になるような出る目の組み合わせは

$$(3, 6, 6), (4, 5, 6), (5, 5, 5)$$

の 3 組あり、目の出方はそれぞれ 3 通り、6 通り、1 通りである。よって、出る目の和が 15 となる確率は

$$\frac{1+3+6}{216} = \frac{5}{108}$$

である。以上より、出る目の和が 5 の倍数となる確率は、(i), (ii) の結果も用いて

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{8} + \frac{5}{108} = \frac{43}{216}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{43}{216}$$

(2)

(i)

数列 $\{a_n\}$ は

$$4, 11, 24, 43, 68, 99, \dots$$

であるから, $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) とおくと, 数列 $\{b_n\}$ は

$$7, 13, 19, 25, 31, \dots$$

となる。 $\{b_n\}$ は初項 7, 公差 6 の等差数列であるから

$$\begin{aligned} b_n &= 7 + 6(n-1) \\ &= 6n + 1 \end{aligned}$$

となる。よって, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 4 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k+1) \\ &= 4 + 3(n-1)n + (n-1) \\ &= 3n^2 - 2n + 3 \end{aligned}$$

であり, これは $n=1$ のときも $a_1 = 4$ を満たす。以上より, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 3n^2 - 2n + 3 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = 3n^2 - 2n + 3$$

(ii)①

方程式 $\log_2 x = \log_4 5$ について, 真数条件より

$$x > 0 \qquad \dots \textcircled{1}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \log_4 5 &= \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \\ &= \frac{1}{2} \log_2 5 \\ &= \log_2 \sqrt{5} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \log_2 x &= \log_4 5 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &= \log_2 \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

となり, これは①を満たす。

$$(\text{答}) \quad x = \sqrt{5}$$

②

方程式 $\log_2 x^2 = 5$ について, 真数条件より

$$\begin{aligned} x^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow x &\neq 0 \qquad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \log_2 x^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2^5 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 32 \\ \Leftrightarrow x &= \pm 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

であり, これらは②を満たす。

$$(\text{答}) \quad x = \pm 4\sqrt{2}$$

(iii)

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x + 41$ とするとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 45 \\ &= 3(x+5)(x-3) \end{aligned}$$

となる。よって, $-8 \leq x \leq 8$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	-8	...	-5	...	3	...	8
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	81	↗	216	↘	-40	↗	385

よって, $f(x)$ は

$x=8$ のとき最大値 385

$x=3$ のとき最小値 -40

をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値 } 385, \text{ 最小値 } -40$$

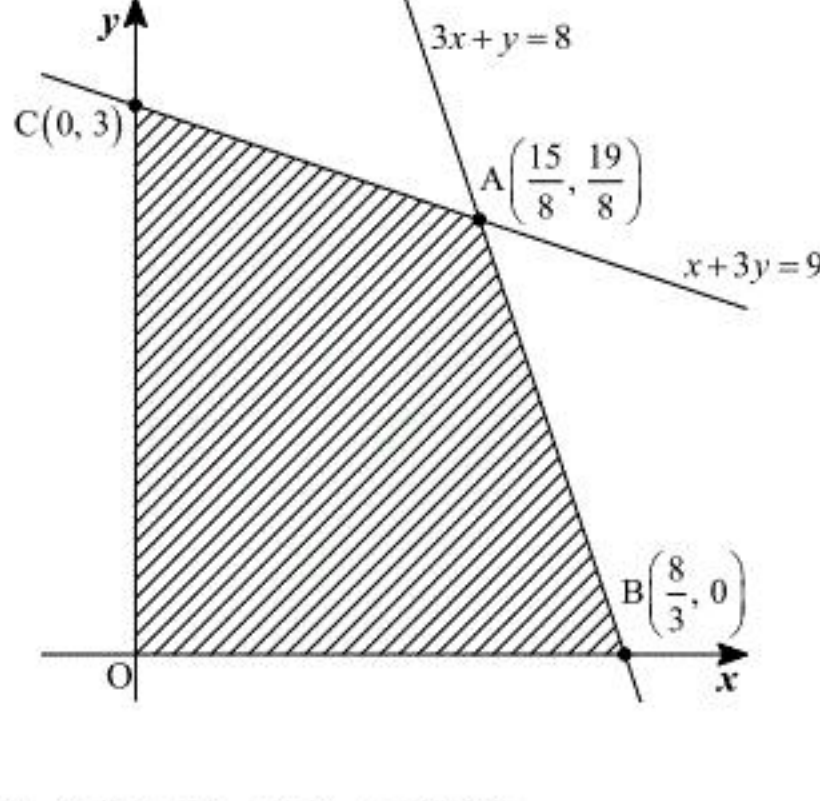
(3)

(i)

2 直線 $3x+y=8$, $x+3y=9$ の交点を A とおくと、その座標は

$$\begin{cases} 3x+y=8 \\ x+3y=9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{15}{8}, \frac{19}{8} \right)$$

である。これを用いて、連立不等式 $x \geq 0, y \geq 0, 3x+y \leq 8, x+3y \leq 9$ が表す領域 A は下図の斜線部のようになる。ただし、境界線を含む。



ここで、 $B\left(\frac{8}{3}, 0\right)$, $C(0, 3)$ とおくと、領域 A の面積は

$$\begin{aligned} \triangle OAC + \triangle OAB &= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{15}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times \frac{19}{8} \\ &= \frac{45}{16} + \frac{19}{6} \\ &= \frac{287}{48} \end{aligned}$$

となる。

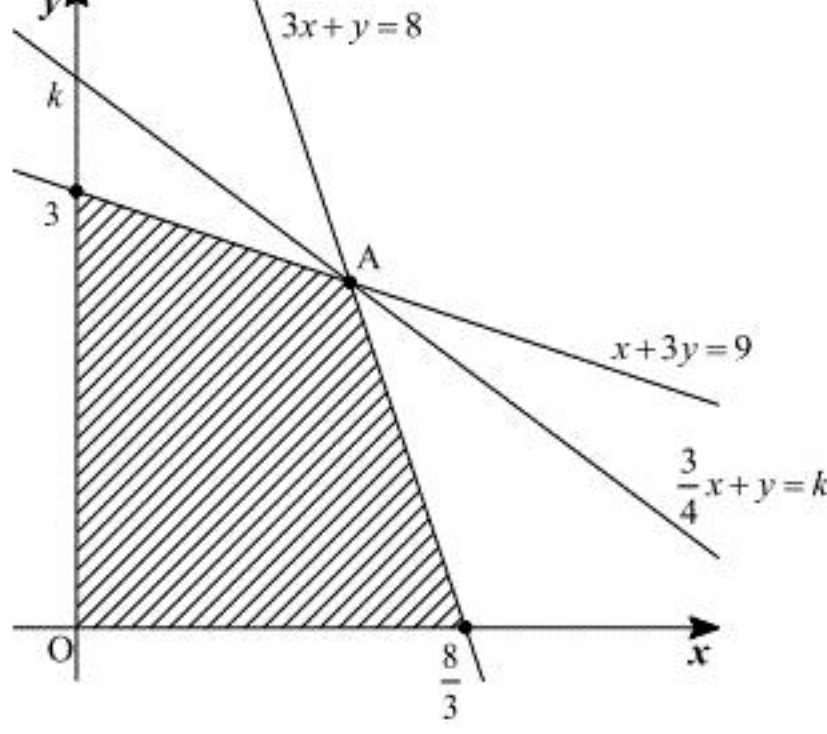
(答) 交点: $\left(\frac{15}{8}, \frac{19}{8}\right)$, 図示: 上図, 面積: $\frac{287}{48}$

(ii)

$\frac{3}{4}x+y=k$ とおくと、領域 A における $\frac{3}{4}x+y$ の値は、直線 $\frac{3}{4}x+y=k$ が領域 A と共有点をも

つときの k の値に対応し、さらに k は直線 $\frac{3}{4}x+y=k$ の y 切片である。

[1] k が最大値をとるとき



$$(3x+y=8 \text{ の傾き}) < \left(\frac{3}{4}x+y=k \text{ の傾き}\right) < (x+3y=9 \text{ の傾き})$$

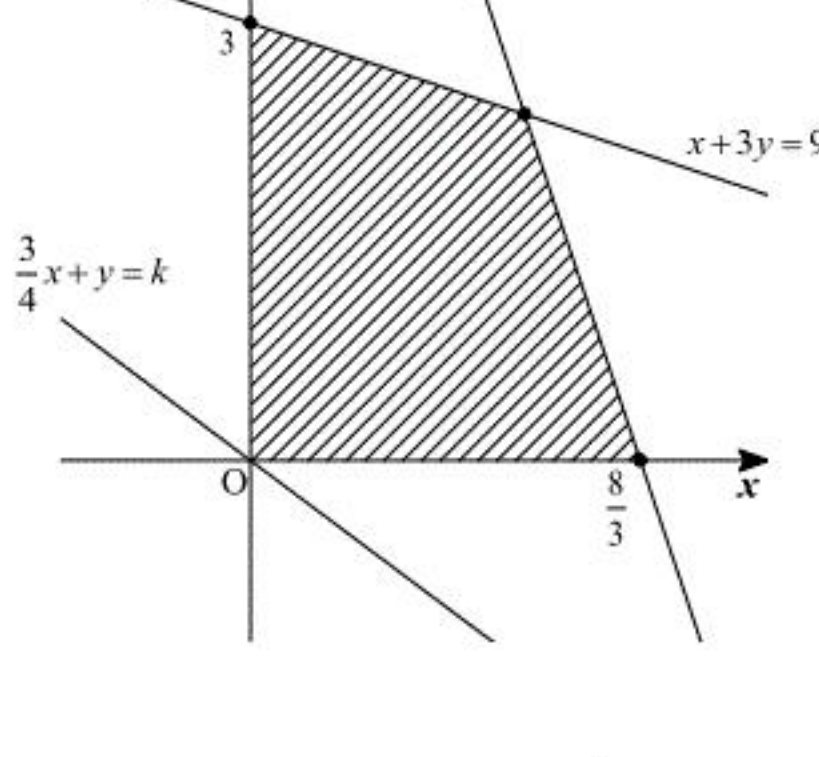
であるから、直線 $\frac{3}{4}x+y=k$ の y 切片 k が最大となるのは、直線 $\frac{3}{4}x+y=k$ が点 A を通る

ときである。よって、このときの k の値は

$$\begin{aligned} k &= \frac{3}{4} \times \frac{15}{8} + \frac{19}{8} \\ &= \frac{121}{32} \end{aligned}$$

である。

[2] k が最小値をとるとき



直線 $\frac{3}{4}x+y=k$ の y 切片 k が最小となるのは、直線 $\frac{3}{4}x+y=k$ が原点を通るときである。

よって、このときの k の値は

$$\begin{aligned} k &= \frac{3}{4} \times 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

以上、[1], [2]より、 $\frac{3}{4}x+y$ は

$$\begin{cases} (x, y) = \left(\frac{15}{8}, \frac{19}{8} \right) \text{ のとき最大値 } \frac{121}{32} \\ (x, y) = (0, 0) \text{ のとき最小値 } 0 \end{cases}$$

をとる。

(答) $(x, y) = \left(\frac{15}{8}, \frac{19}{8} \right)$ のとき最大値 $\frac{121}{32}$, $(x, y) = (0, 0)$ のとき最小値 0

(iii)

直線 $x+3y=9$ と放物線 $y=\frac{8}{3}x^2$ の交点の x 座標は

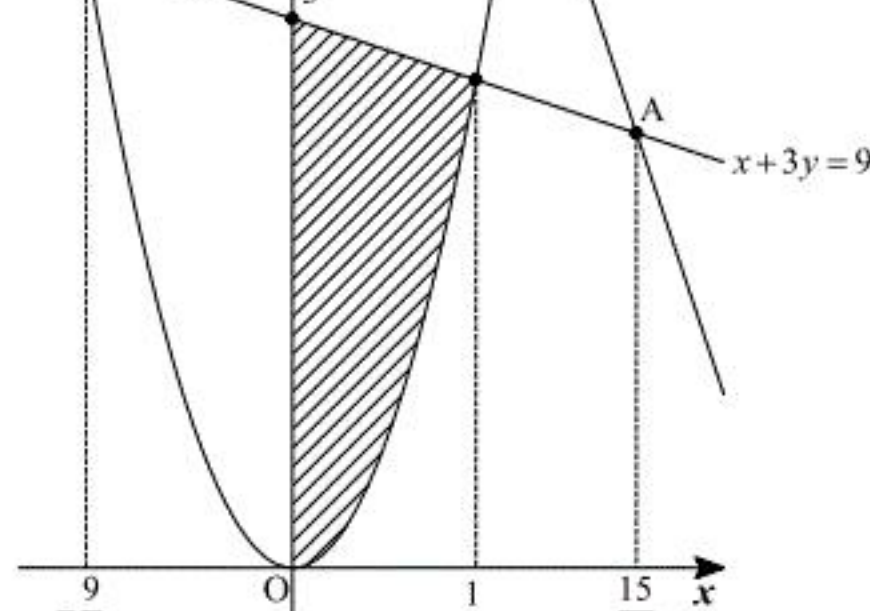
$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}x+3 &= \frac{8}{3}x^2 \\ \Leftrightarrow (8x+9)(x-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{9}{8}, 1 \end{aligned}$$

であり

$$-\frac{9}{8} < 0 < 1 < \frac{15}{8}$$

であるから、不等式 $y \geq \frac{8}{3}x^2$ が表す領域と領域 A の共通部分である領域 B は下図の斜線部の

ようになる。ただし、境界線を含む。



以上より、領域 B の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \left(-\frac{1}{3}x+3 \right) - \frac{8}{3}x^2 \right\} dx &= \left[-\frac{1}{6}x^2 + 3x - \frac{8}{9}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{35}{18} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{35}{18}$

(iv)

直線 OA の傾きは $\frac{19}{15}$ であり、また直線 $y=ax$ の傾きは a である。

[1] $a < 0$ のとき

不等式 $y \leq ax$ が表す領域と領域 A の共通部分は原点のみであり、この領域 C の面積は 0 であるから領域 $B(>0)$ の面積と等しくなることはなく、不適である。

[2] $a = 0$ のとき

不等式 $y \leq ax$ が表す領域と領域 A の共通部分は x 軸上の $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$ の部分であり、この

領域 C の面積は 0 であるから領域 $B(>0)$ の面積と等しくなることはなく、不適である。

[3] $0 < a < \frac{19}{15}$ のとき

2 直線 $y=ax$, $3x+y=8$ の交点を D とおくと、領域 C は $\triangle OBD$ の周および内部である。

ここで

$$0 < \triangle OBD < \triangle OAB$$

$$\Leftrightarrow 0 < \triangle OBD < \frac{19}{6}$$

であり

$$\frac{19}{6} > \frac{35}{18} \quad (= \text{領域 } B \text{ の面積}) \quad (\because \text{iii})$$

であるから、領域 C つまり $\triangle OBD$ の面積が領域 B の面積と等しくなりうる。ここで、点 D の座標は

$$\begin{cases} 3x+y=8 \\ y=ax \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{8}{a+3}, \frac{8a}{a+3} \right)$$

であるから、領域 C の面積が領域 B の面積と等しくなるとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times \frac{8a}{a+3} &= \frac{35}{18} \\ \Leftrightarrow 192a &= 35(a+3) \\ \Leftrightarrow a &= \frac{105}{157} \end{aligned}$$

となり、これは $0 < a < \frac{19}{15}$ を満たす。

[4] $a \geq \frac{19}{15}$ のとき

2 直線 $y=ax$, $x+3y=9$ の交点を E とおくと、領域 C は四角形 $OBAE$ の周および内部である。ここで、[3]より

$$\text{四角形 } OBAE > \triangle OAB$$

$$> \text{領域 } B \text{ の面積}$$

となるから、領域 C の面積が領域 B の面積と等しくなることはなく、不適である。

以上、[1], [2], [3], [4]より、領域 C の面積が領域 B の面積と等しくなる実数 a の値は $a = \frac{105}{157}$ である。

(答) $a = \frac{105}{157}$

(4)

(i)

整数 n を用いて

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 + 2\sin 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin 2x &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2x &= -\frac{\pi}{6} + 2n\pi, -\frac{5}{6}\pi + 2n\pi \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{\pi}{12} + n\pi, -\frac{5}{12}\pi + n\pi\end{aligned}$$

となる。このうち、 $0 \leq x \leq \pi$ を満たす x の値は $x = \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi$ である。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi$$

(ii)

(i)の結果を用いて

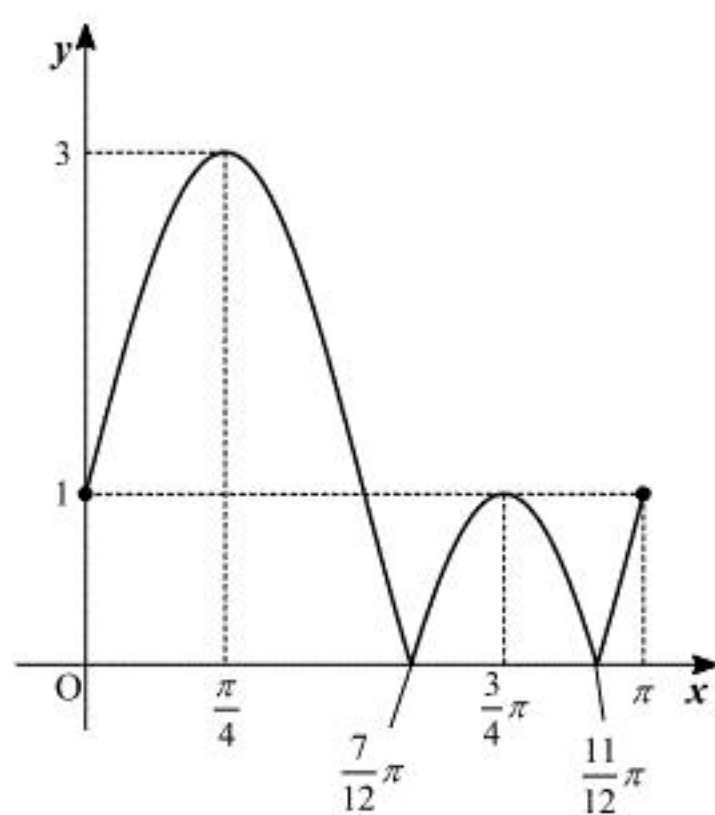
$$0 \leq x \leq \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi \leq x \leq \pi \text{ のとき } 1 + 2\sin 2x \geq 0$$

$$\frac{7}{12}\pi < x < \frac{11}{12}\pi \text{ のとき } 1 + 2\sin 2x < 0$$

となるから

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2\sin 2x & (0 \leq x \leq \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi \leq x \leq \pi) \\ -1 - 2\sin 2x & (\frac{7}{12}\pi < x < \frac{11}{12}\pi) \end{cases}$$

である。よって、 $0 \leq x \leq \pi$ における $y = f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



(答) 前図

(iii)

(ii)の結果を用いて

$$\begin{aligned}& \int_0^\pi f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{7}{12}\pi} (1 + 2\sin 2x) dx + \int_{\frac{7}{12}\pi}^{\frac{11}{12}\pi} (-1 - 2\sin 2x) dx + \int_{\frac{11}{12}\pi}^\pi (1 + 2\sin 2x) dx \\ &= [x - \cos 2x]_0^{\frac{7}{12}\pi} + [-x + \cos 2x]_{\frac{7}{12}\pi}^{\frac{11}{12}\pi} + [x - \cos 2x]_{\frac{11}{12}\pi}^\pi \\ &= \left(\frac{7}{12}\pi - \cos \frac{7}{6}\pi + 1 \right) + \left(-\frac{11}{12}\pi + \cos \frac{11}{6}\pi + \frac{7}{12}\pi - \cos \frac{7}{6}\pi \right) + \left(\pi - 1 - \frac{11}{12}\pi + \cos \frac{11}{6}\pi \right) \\ &= \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^\pi f(x) dx = \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

(iv)

(iii)の結果を用いて

$$\begin{aligned}3\pi + 18\sqrt{3} &= 9 \times \left(\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right) \\ &= 9 \int_0^\pi f(x) dx\end{aligned}$$

となる。ここで

$$g(x) = \int_{\frac{11}{12}\pi}^x f(t) dt$$

とおくと

$$\begin{aligned}g'(x) &= f(x) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

より $g(x)$ は単調増加関数となるから

$$\int_{\frac{11}{12}\pi}^x f(t) dt = 3\pi + 18\sqrt{3} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 9 \int_0^\pi f(x) dx$$

を満たす x の値はただ 1 つ存在する。また

$$f(x + \pi) = f(x)$$

より $f(x)$ の周期は π であるから

$$g\left(n\pi + \frac{11}{12}\pi\right) = n \int_0^\pi f(x) dx$$

となる。以上より、 $\textcircled{1}$ を満たす x の値はただ 1 つ存在し

$$\begin{aligned}x &= 9\pi + \frac{11}{12}\pi \\ &= \frac{119}{12}\pi\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{119}{12}\pi$$

(5)

(i)

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= a^3 + (b+c)^3 - 3abc - 3bc(b+c) \\&= (a+b+c) \{a^2 - a(b+c) + (b+c)^2\} - 3bc(a+b+c) \\&= (a+b+c) \{a^2 - (ab+ca) + (b^2 + 2bc + c^2) - 3bc\} \\&= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

(ii)

整数 a, b, c に対して、 $a+b+c, abc$ が 3 の倍数のとき、整数 p, q, r を用いて

$$a+b+c=3p \quad \dots \textcircled{1}$$

$$ab+bc+ca=q \quad \dots \textcircled{2}$$

$$abc=3r \quad \dots \textcircled{3}$$

と表される。ここで、(i)の結果を用いて

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\&= (a+b+c) \{ (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) \} + 3abc \\&= 3p(9p^2 - 3q) + 9r \\&= 9(3p^3 - pq + r)\end{aligned}$$

となり、 $3p^3 - pq + r$ は整数であるから、 $a^3 + b^3 + c^3$ は 9 の倍数であることが示された。

(証明終)

(iii)

$a+b+c=6$ であるとき、 $\textcircled{1}$ より

$$3p=6$$

$$\Leftrightarrow p=2$$

となる。また

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{ab+bc+ca}{abc} \\&= \frac{q}{3r}\end{aligned}$$

より、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$ であるとき、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ より

$$\begin{aligned}\frac{q}{3r} &= \frac{1}{3} \\&\Leftrightarrow q=r\end{aligned}$$

となる。よって、(ii)の結果を用いて

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 + 3abc &= 9(3p^3 - pq + r) + 9r \\&= 9(3 \times 2^3 - 2 \times r + r) + 9r \\&= 216\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = 216$$

(6)

(i)

点 D は BC の中点であるから

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

であり, $AP:PD = t:(1-t)$ とするとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OD} \\ &= (1-t)\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = (1-t)\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c}$$

(ii)

$$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = 2\cos\theta$$

であるから, (i)の結果を用いて

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|^2 &= \left| (1-t)\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c} \right|^2 \\ &= (1-t)^2 |\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}t^2 |\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}t^2 |\vec{c}|^2 + (1-t)t\vec{a} \cdot \vec{b} + (1-t)t\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{2}t^2 \vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= (1-t)^2 + \frac{1}{4}t^2 \times 2 + \frac{1}{4}t^2 \times 2 + \frac{1}{2}t^2 \times 2\cos\theta \\ &= (2 + \cos\theta)t^2 - 2t + 1 \\ &= (2 + \cos\theta) \left(t - \frac{1}{2 + \cos\theta} \right)^2 + 1 - \frac{1}{2 + \cos\theta}\end{aligned}$$

となる。よって, OP の長さが最小となるのは $t = \frac{1}{2 + \cos\theta}$ のときであり

$$\overrightarrow{OP} = \left(1 - \frac{1}{2 + \cos\theta} \right) \vec{a} + \frac{1}{2(2 + \cos\theta)} \vec{b} + \frac{1}{2(2 + \cos\theta)} \vec{c}$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \left(1 - \frac{1}{2 + \cos\theta} \right) \vec{a} + \frac{1}{2(2 + \cos\theta)} \vec{b} + \frac{1}{2(2 + \cos\theta)} \vec{c}$$

(iii)

OP の長さが最小となるとき, 図形の対称性より点 P は $\triangle ABC$ に下ろした垂線の足である。

よって, (ii)の結果で定められる点 P を H とおくと $OH \perp AD$ である。また, 条件①, ③より, 線分 OQ は平面 ABC と平行である。点 Q から $\triangle ABC$ に下ろした垂線の足を I とすると, $\triangle QIA$, $\triangle QIB$, $\triangle QIC$ において

$$QI \text{ は共通, } \angle QIA = \angle QIB = \angle QIC (= 90^\circ)$$

より, 直角三角形の斜辺と他の 1 辺の長さが等しく, $\triangle QIA \equiv \triangle QIB \equiv \triangle QIC$ である。互いに合同な図形の対応する辺の長さは等しいから, $IA = IB = IC$ となり, 点 I は $\triangle ABC$ の外心である。さらに, $AB = BC = CA$ より $\triangle ABC$ は正三角形であるから, 点 I は $\triangle ABC$ の重心に一致し, 線分 AD 上に存在する。以上より

$$OH = QI, OH \parallel QI, \angle OHI = 90^\circ$$

となり, 四角形 OHIQ は長方形である。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{HI} \\ &= \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OH} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \left\{ \left(1 - \frac{1}{2 + \cos\theta} \right) \vec{a} + \frac{1}{2(2 + \cos\theta)} \vec{b} + \frac{1}{2(2 + \cos\theta)} \vec{c} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2 + \cos\theta} - \frac{2}{3} \right) \vec{a} + \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2(2 + \cos\theta)} \right\} \vec{b} + \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2(2 + \cos\theta)} \right\} \vec{c}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OQ} = \left(\frac{1}{2 + \cos\theta} - \frac{2}{3} \right) \vec{a} + \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2(2 + \cos\theta)} \right\} \vec{b} + \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2(2 + \cos\theta)} \right\} \vec{c}$$

(7)
(i)①

$$\begin{aligned}(1-x) \int_0^x f(t) dt &= x \int_x^1 f(t) dt \\ \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt &= x \left(\int_0^x f(t) dt + \int_x^1 f(t) dt \right) \\ \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt &= x \int_0^1 f(t) dt\end{aligned}$$

となるから、両辺を x で微分すると

$$f(x) = \int_0^1 f(t) dt$$

となる。ここで、 $\int_0^1 f(t) dt$ は x に依存しない定数であるから、この値を C とおくと

$$f(x) = C$$

となり、 $f(1) = 1$ であることより $C = 1$ となる。以上より、 $f(x) = 1$ である。

(答) $f(x) = 1$

②

$x < y$ ならば $g(x) > g(y)$ を満たすことより、 $g(x)$ は単調減少関数である。また

$$F(x) = \int_a^x \cos(t-a) g(\sin(t-a)) dt - f(x)$$

の両辺を x で微分すると

$$F'(x) = \cos(x-a) g(\sin(x-a)) \quad (\because f'(x) = 0)$$

となる。ここで、 $\theta = x - a$ とおくと

$$F'(x) = \cos \theta g(\sin \theta)$$

と表され、 $a < x < 2a$ のとき

$$0 < \theta < a \quad (\leq \pi) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。 $0 < \theta < \pi$ において

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \cos \theta > 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \cos \theta = 0$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ のとき } \cos \theta < 0$$

である。また、 $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ より

$$\begin{aligned}g(\sin \theta) &> 0 \\ \Leftrightarrow \sin \theta &< \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow 0 < \theta &< \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi < \theta < \pi\end{aligned}$$

であり、同様にして

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi < \theta < \pi \text{ のとき } g(\sin \theta) > 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \text{ のとき } g(\sin \theta) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi \text{ のとき } g(\sin \theta) < 0$$

となる。よって、 $0 < \theta < \pi$ における $F(x)$ の増減表は以下のようになる。

θ	(0)	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	(π)
$\cos \theta$		+	+	+	0	-	-	-	
$g(\sin \theta)$		+	0	-	-	-	0	+	
$F'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$F(x)$			極大		極小		極大		

以上より、開区間 $(a, 2a)$ 、つまり、 $\textcircled{1}$ において $F(x)$ が極大値をただ 1 つもつような a の値の範囲は

$$\frac{\pi}{4} < a \leq \frac{3}{4}\pi$$

である。

(答) $\frac{\pi}{4} < a \leq \frac{3}{4}\pi$

(ii)

$$F(x) = \int_a^{x+a} \cos(t-a) g(\sin(t-a)) dt - f(x)$$

とするとき、 $u = \sin(t-a)$ とおくと

$$\frac{du}{dt} = \cos(t-a)$$

t	a	$\rightarrow$	$x+a$
u	0	$\rightarrow$	$\sin x$

であるから

$$F(x) = \int_0^{\sin x} g(u) du - f(x)$$

と表される。ここで、 $f(x) > 0$ 、 $g(x) = xf(x)$ であるから、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ のとき $g(x) \geq 0$ である。

また、 $f'(x) > 0$ より $f(x)$ は単調増加関数であるから、 $x \geq 0$ において $g(x)$ も単調増加関数である。よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\sin x} g(u) du &\leq \int_0^{\sin x} g(\sin x) du \\ &= [g(\sin x)u]_0^{\sin x} \\ &= g(\sin x) \sin x \\ &= f(\sin x) \sin^2 x\end{aligned}$$

となる。ここで、 $x \geq 0$ において $h(x) = x - \sin x$ とおくと

$$\begin{aligned}h'(x) &= 1 - \cos x \\ &\geq 0\end{aligned}$$

より、 $h(x)$ は増加関数であり、 $h(0) = 0$ であることから

$$\begin{aligned}h(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x - \sin x &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x &\geq \sin x\end{aligned}$$

となる。さらに、このとき $f(x)$ は単調増加関数であるから $f(x) \geq f(\sin x)$ である。以上の

結果を用いて、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ のとき

$$\begin{aligned}F(x) &\leq f(\sin x) \sin^2 x - f(x) \\ &\leq f(\sin x) \sin^2 x - f(\sin x) \\ &= f(\sin x) (\sin^2 x - 1) \\ &\leq 0\end{aligned}$$

より、 $F(x) \leq 0$ となることが示された。

(証明終)