

(1)

(i)

①

$a_{n+1} = a_n + 4n - 1$ に $n = 1, 2, 3, 4$ を代入する。

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 4 \times 1 - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + 4 \times 2 - 1 \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + 4 \times 3 - 1 \\ &= 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 + 4 \times 4 - 1 \\ &= 38 \end{aligned}$$

となり、以上の結果を得る。

(答) $a_2 = 5, a_3 = 12, a_4 = 23, a_5 = 38$

②

$a_{n+1} = a_n + 4n - 1$ であるから、 n が 2 以上のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 1) \\ &= 2 + \frac{1}{2}(n-1)(3+4n-5) \\ &= 2n^2 - 3n + 3 \end{aligned}$$

となる。これは $n = 1$ でも成り立つ。

(答) $a_n = 2n^2 - 3n + 3$

(ii)

①

$(1+x)^{10}$ の展開式における x^7 の係数は

$$\begin{aligned} {}_{10}C_7 &= {}_{10}C_3 \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 120 \end{aligned}$$

となる。

(答) 120

②

$x = 15$ とすると、 $16^{16} = (x+1)^{16}$ 、 $225 = x^2$ となる。よって、 $(x+1)^{16}$ を x^2 で割った余りを考える。

$(x+1)^{16}$ の展開式における x の係数は ${}_{16}C_1 = 16$ より 16 となり、定数項は 1 である。よって、

$(x+1)^{16}$ を x^2 で割った余りは $16x+1$ となる。ここで、 $x = 15$ のとき $16x+1 = 241$ である。よつ

て、 16^{16} を 225 で割った余りは、241 を 225 で割った余りに等しく 16 となる。

(答) 16

(2)

(i)

$f(x) = x^2 - 3x$ なので、 $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ となる。よって、軸は $x = \frac{3}{2}$ となり、 $-3 \leq x \leq 3$ に

おける最小値は $x = \frac{3}{2}$ で $-\frac{9}{4}$ 、最大値は $x = -3$ で

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^2 - 3 \times (-3) \\ &= 18 \end{aligned}$$

より、18となる。

(答) 最大値 18 最小値 $-\frac{9}{4}$

(ii)

接線は明らかに y 軸に平行でないので接線の傾きを m とすると、接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= m(x-3) - 4 \\ &= mx - 3m - 4 \end{aligned}$$

となる。これが $y = f(x)$ と接するので、

$$\begin{aligned} mx - 3m - 4 &= x^2 - 3x \\ \Leftrightarrow x^2 - (3+m)x + 3m + 4 &= 0 \end{aligned}$$

の解は重解となる。この方程式の左辺の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow (3+m)^2 - 4 \times (3m+4) &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m-7)(m+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= -1, 7 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $m = -1, 7$ であり接線は $y = -x - 1, y = 7x - 25$ となる。

(答) $y = -x - 1, y = 7x - 25$

(iii)

$y = 7x - 25$ についての接点は $y = f(x)$ と連立させたときの解なので、

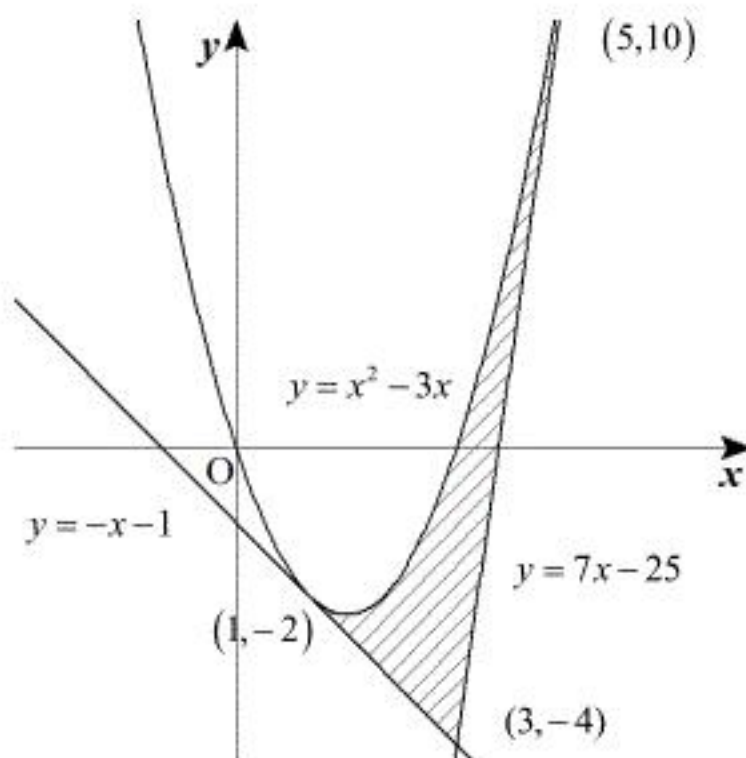
$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= 7x - 25 \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-5)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 5 \end{aligned}$$

となり、接点の x 座標は $x = 5$ となる。 $y = -x - 1$ についての接点は $y = f(x)$ と連立させたときの解なので、

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= -x - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

となり、接点の x 座標は $x = 1$ となる。接点は $y = f(x)$ 上にあるので $(1, -2)$ $(5, 10)$ となる。

$y = f(x)$ と二本の接線を図示すると下図のようになる。



求める面積は上図の斜線部となる。よって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_1^3 \{(x^2 - 3x) - (-x - 1)\} dx + \int_3^5 \{(x^2 - 3x) - (7x - 25)\} dx &= \int_1^3 (x-1)^2 dx + \int_3^5 (x-5)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_1^3 + \left[\frac{1}{3}(x-5)^3 \right]_3^5 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{16}{3}$

(3)

(i)

真数条件より $x > 2$ である。 $f(x) = \log_2(x+1) + \log_2(x-2) - 2$ で $f(x) = 0$ となるのは,

$$\log_2(x+1) + \log_2(x-2) = 2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 4, x > 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0, x > 2$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-3) = 0, x > 2$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

となり, $x = 3$ となる。

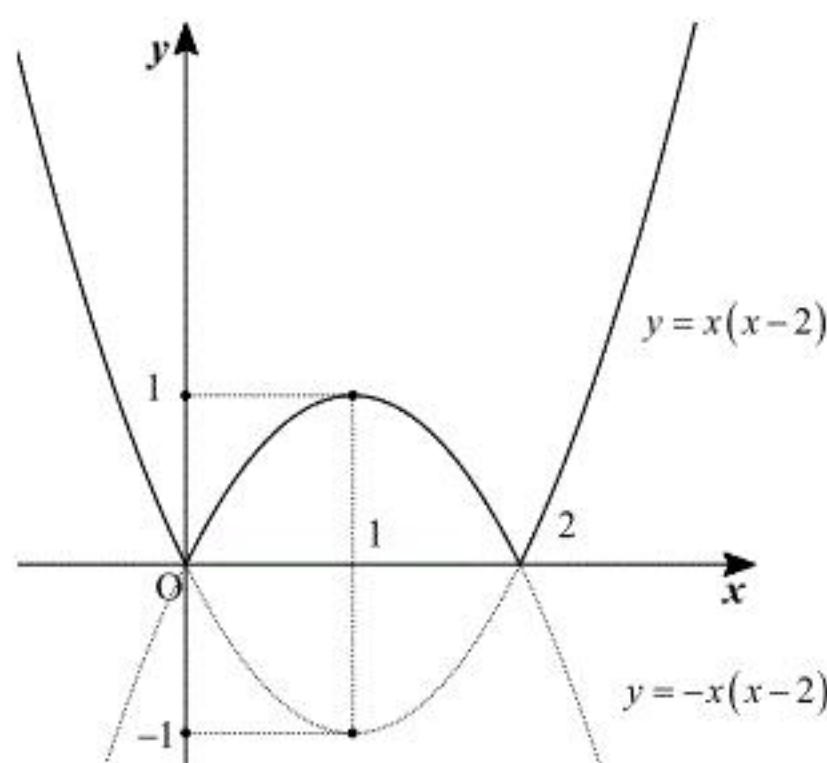
(答) $x = 3$

(ii)

$g(x) = |x(x-2)|$ は,

$$\begin{cases} g(x) = x(x-2) & (x < 0, x > 2) \\ g(x) = -x(x-2) & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

となる。よって, $y = g(x)$ のグラフは以下のようになる。



(答) 上図

(iii)

(i)より $a = 3$ であり,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 x(x-2) dx + \int_0^2 -x(x-2) dx + \int_2^3 x(x-2) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^3 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

となるので, 求める面積は4である。

(答) 4

(4)

(i)

$a=0$ のとき, A は $(-4,5)$, $B(0,3)$ となるので $\overline{AB}=(4,-2)$ である。よって, 求めるベクトルは

$$\begin{aligned}\pm \frac{1}{|\overline{AB}|}(2,4) &= \pm \frac{1}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}(2,4) \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)\end{aligned}$$

より, $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ となる。

(答) $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$

(ii)

$a=0$ のとき, C は $(1,2)$ となるので $\overline{AC}=(5,-3)$ である。よって, 求める面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{|\overline{AB}|^2|\overline{AC}|^2-(\overline{AB}\cdot\overline{AC})^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{\{4^2+(-2)^2\}\times\{5^2+(-3)^2\}-\{4\times 5+(-2)\times(-3)\}^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{20\times 34-(26)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

より, 1 となる。

(答) 1

(iii)

A, B, C が一直線上に並ぶには, $\overline{AB}$ が $\overline{AC}$ と平行になればよい。 $\overline{AB}=(-a^3+a+4,-2)$,

$\overline{AC}=(-a^3+5,-3)$ より, $\overline{AB}$ が $\overline{AC}$ と平行であるとき, ある実数 k を用いて, $\overline{AB}=k\overline{AC}$ と表

せる。 y 成分の値を比較すると

$$-2 = -3k \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

となる。 x 成分の値を比較すると

$$-a^3+a+4 = \frac{2}{3}(-a^3+5)$$

$$\Leftrightarrow a^3-3a-2=0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2(a-2)=0$$

$$\Leftrightarrow a=-1,2$$

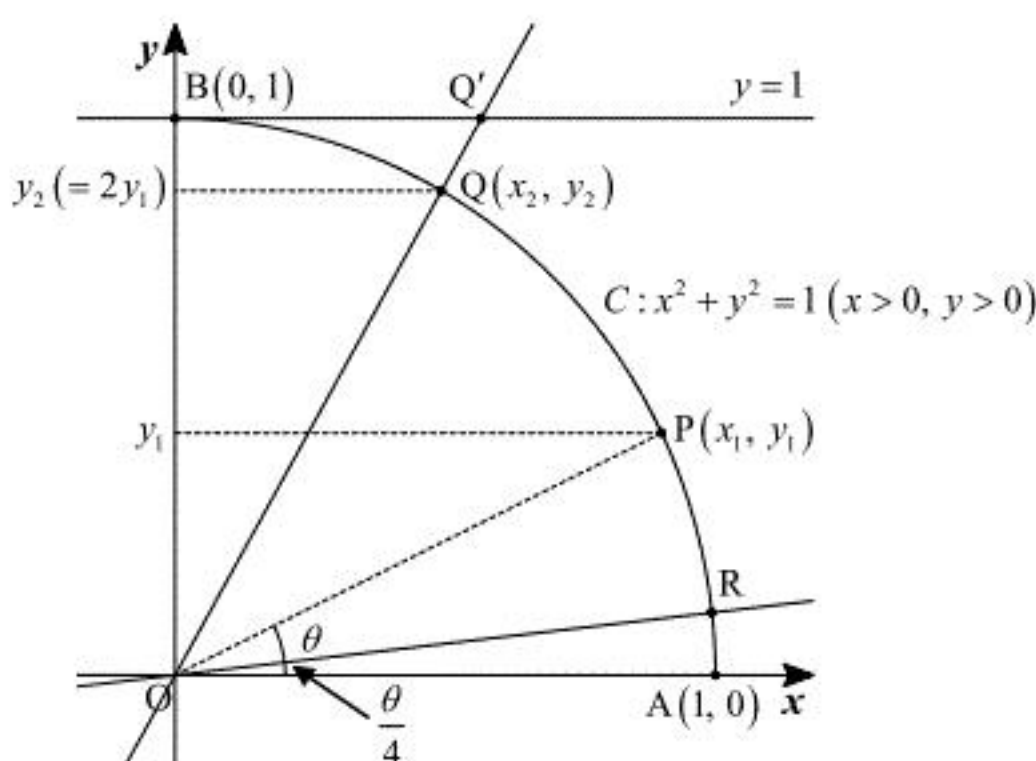
となり, $a=-1,2$ で A, B, C が一直線上に並ぶ。

(答) $a=-1,2$ で A, B, C が一直線上に並ぶ。

(5)

(i)

与えられた状況を図示すると、下図のようになる。



点 $P(x_1, y_1)$ の座標は $P(\cos \theta, \sin \theta)$ であり、点 $Q(x_2, y_2)$ は弧 C 上の $2y_1 = y_2$ を満たす点であるから

$$y_2 = 2y_1 = 2\sin \theta, \quad x_2 = \sqrt{1 - y_2^2} = \sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}$$

となる。したがって、点 Q の座標は $Q(\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}, 2\sin \theta)$ であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad Q(\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}, 2\sin \theta)$$

(ii)

点 Q' は直線 OQ と直線 $y=1$ の交点である。ここで、直線 OQ の方程式は、(i)の結果より

$$y = \frac{2\sin \theta}{\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}} x$$

であるから、点 Q' の座標は $Q'\left(\frac{\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}}{2\sin \theta}, 1\right)$ であることがわかる。

また、点 R' は直線 OR と直線 $y=1$ の交点である。ここで、直線 OR の方程式は

$$y = \tan \frac{\theta}{4} x$$

であるから、点 R' の座標は $R'\left(\tan \frac{\theta}{4}, 1\right)$ であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad Q'\left(\frac{\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}}{2\sin \theta}, 1\right), \quad R'\left(\tan \frac{\theta}{4}, 1\right)$$

(iii)

点 P が点 A に限りなく近づくとき、 θ は限りなく 0 に近づく。また、(ii)の結果より

$$\frac{BR'}{BQ'} = \frac{\tan \frac{\theta}{4}}{\frac{\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}}{2\sin \theta}} = \frac{\cos \frac{\theta}{4}}{\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}} \cdot \frac{2\sin \theta}{\sin \frac{\theta}{4}} = 8 \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{4}}{\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\frac{\theta}{4}}{\sin \frac{\theta}{4}}$$

であるから、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を用いて、求める極限值は

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{BR'}{BQ'} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(8 \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{4}}{\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\frac{\theta}{4}}{\sin \frac{\theta}{4}} \right) = 8 \cdot \frac{1}{1} \cdot 1 \cdot 1 = 8$$

となる。

(答) 8

(6)

(i)

複素数 z が等式 $|iz+3|=|2z-6|$ を満たすとき、 $z=x+iy$ (x, y は実数) とおくと、条件は

$$\begin{aligned} &|iz+3|=|2z-6| \\ \Leftrightarrow &|i(x+iy)+3|=|2(x+iy)-6| \\ \Leftrightarrow &|(-y+3)+xi|=|(2x-6)+2yi| \\ \Leftrightarrow &(-y+3)^2+x^2=(2x-6)^2+(2y)^2 \\ \Leftrightarrow &x^2+y^2-8x+2y+9=0 \\ \Leftrightarrow &(x-4)^2+(y+1)^2=(2\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

となり、これは xy 平面上で点 $(4, -1)$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円を表す。したがって、複素数 z は複素数平面上において点 $4-i$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円を表す。

(答) 点 $4-i$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円

(ii)

複素数 z が等式 $z-\bar{z}=0$ を満たすとき、 $z=x+iy$ (x, y は実数) とおくと、条件は

$$\begin{aligned} &z-\bar{z}=0 \\ \Leftrightarrow &(x+yi)-(x-yi)=0 \\ \Leftrightarrow &y=0 \end{aligned}$$

となる。したがって、問題文と(ii)の条件を満たすとき、(i)の結果と合わせて

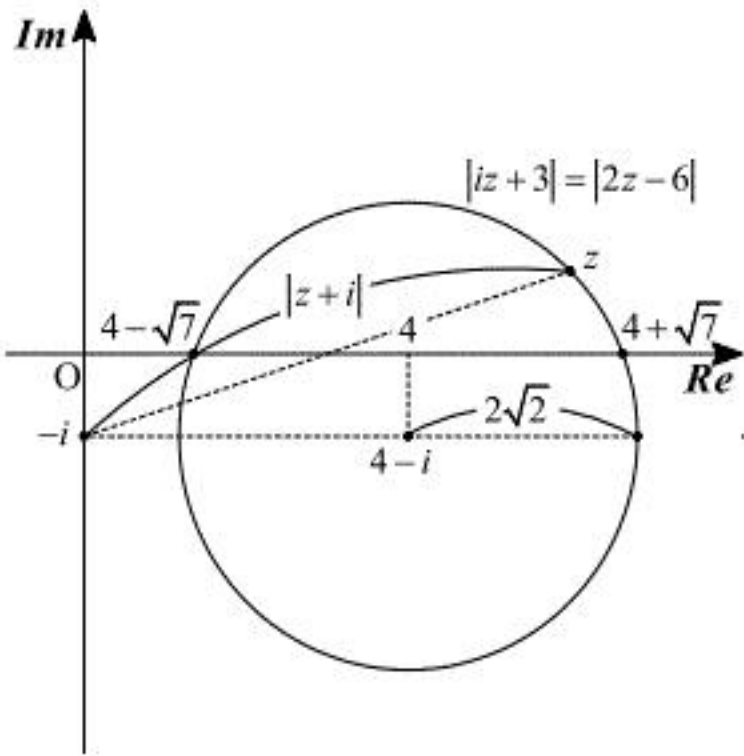
$$\begin{aligned} &\begin{cases} (x-4)^2+(y+1)^2=(2\sqrt{2})^2 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2+1=8 \\ y=0 \end{cases} \\ \therefore &(x, y)=(4\pm\sqrt{7}, 0) \end{aligned}$$

となるから、求める z の値は $z=4\pm\sqrt{7}$ であることがわかる。

(答) $4\pm\sqrt{7}$

(iii)

複素数平面上において $|z+i|$ は複素数 z と $-i$ の距離を表す。ここで、(i)の結果より、等式 $|iz+3|=|2z-6|$ を満たす点 z 全体は、点 $4-i$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円であるから、 $|z+i|$ が最大となるのは、点 z がこの円上で、点 $-i$ からの距離が最も大きいときである。



上図より、 $|z+i|$ は $z=(4+2\sqrt{2})-i$ のとき最大値 $4+2\sqrt{2}$ をとることがわかる。

(答) $4+2\sqrt{2}$

(7)

(i)

操作 (*) のあとで A に存在する白玉の数は 2,3,4 個のいずれかである。白玉が 2 個になるのは初めに白玉を A から取り出し, B から黒玉を取り出したときである。よって, その確率は

$$\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$$

となり, $\frac{1}{7}$ である。白玉が 4 個になるのは初めに黒玉を A から取り出し, B から白玉を取り出したときである。よって, その確率は

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

となり, $\frac{2}{7}$ である。白玉が 3 個になるのは余事象の確率を考えて

$$1 - \frac{1}{7} - \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

となり, $\frac{4}{7}$ である。操作 (*) のあとで A に存在する白玉の数は 2,3,4 個のいずれかであり, そ

れぞれの場合について玉を取り出したとき, 白玉となる確率は $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}$ であるから, 求める確率は

$$\frac{1}{7} \times \frac{2}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{22}{49}$$

となり, 求める確率は $\frac{22}{49}$ である。

(答) $\frac{22}{49}$

(ii)

操作 (*) のあとで, 袋 A から玉を取り出したら白玉である事象を X , 袋 B の白玉が 2 個, すなわち袋 A の白玉が 4 個である事象を Y とする。(i) より, X が起こる確率は $\frac{22}{49}$ であり, X かつ Y が起こる確率は,

$$\frac{2}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{49}$$

である。よって, 求める確率, すなわち X が起こったという条件の下での Y の確率は

$$\frac{\frac{8}{49}}{\frac{22}{49}} = \frac{4}{11}$$

となり, 求める確率は $\frac{4}{11}$ である。

(答) $\frac{4}{11}$

(iii)

操作 (*) のあとで A に存在する白玉が 2 個であり, かつ硬貨が表で出て, かつ A から白玉が取り出される確率は, (i) より,

$$\frac{1}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$$

である。同様にして, 操作 (*) のあとで A に存在する白玉の個数と, 硬貨の表裏によって, A から白玉が取り出される確率を表にまとめると以下ようになる。

		操作 (*) のあとで A に存在する白玉の個数		
		2 個	3 個	4 個
硬貨	表	$\frac{1}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$	$\frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{8}$	$\frac{2}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{8}$
	裏	$\frac{1}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{7}$	$\frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{7}$	$\frac{2}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{7}$

上表より, A から白玉を取り出す確率は,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{8} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} \\ &= \frac{1}{14} \times \left(\frac{29}{8} + \frac{22}{7} \right) \\ &= \frac{1}{14} \times \frac{379}{56} \end{aligned}$$

である。また, 白玉が入れられたのが A であり, かつ A から白玉を取り出す確率は,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{8} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} \\ &= \frac{1}{14} \times \frac{29}{8} \end{aligned}$$

である。よって, 求める確率は,

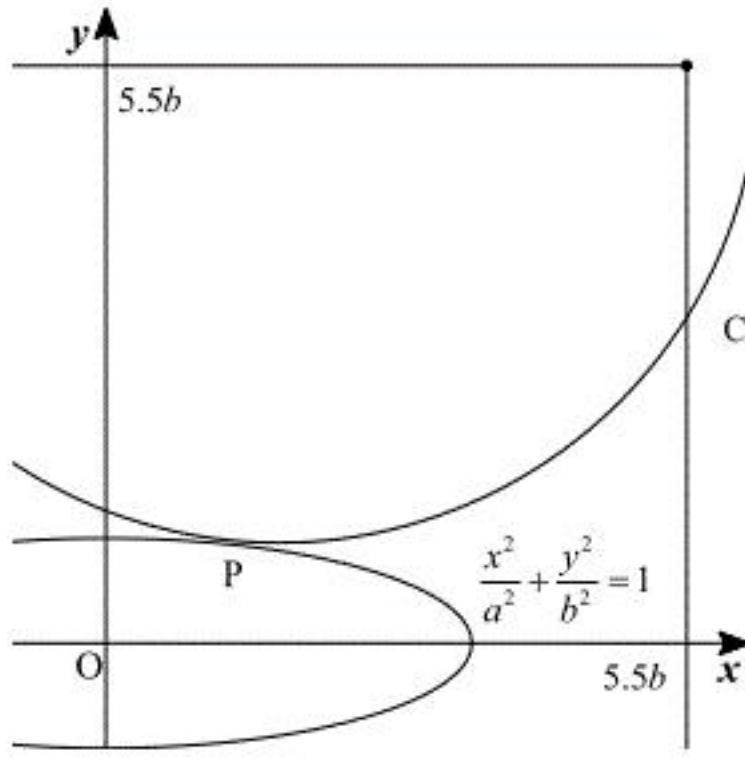
$$\frac{\frac{1}{14} \times \frac{29}{8}}{\frac{1}{14} \times \frac{379}{56}} = \frac{203}{379}$$

である。

(答) $\frac{203}{379}$

(8)

(i)



点 P を $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ と置くと、点 P における接線は

$$\frac{\cos \theta}{a} x + \frac{\sin \theta}{b} y = 1$$

である。よってこの接線の法線ベクトルの一つは $\left(\frac{\cos \theta}{a}, \frac{\sin \theta}{b}\right)$ となる。 $a = 2\sqrt{3}b$ よりこれは

$(\cos \theta, 2\sqrt{3} \sin \theta)$ と平行である。円 C は楕円の外に存在するので、C の中心を O' とすると $\overrightarrow{PO'}$

は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PO'} &= r(\theta) \times \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta + (2\sqrt{3} \sin \theta)^2}} \times (\cos \theta, 2\sqrt{3} \sin \theta) \\ &= \frac{r(\theta)}{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}} \times (\cos \theta, 2\sqrt{3} \sin \theta) \end{aligned}$$

より、 $\frac{r(\theta)}{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}} \times (\cos \theta, 2\sqrt{3} \sin \theta)$ となる。よって O' の座標は

$$\begin{aligned} &\left(2\sqrt{3}b \cos \theta + \frac{r(\theta) \cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}}, b \sin \theta + \frac{2\sqrt{3}r(\theta) \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}}\right) \text{ となる。} \\ &\text{(答)} \left(2\sqrt{3}b \cos \theta + \frac{r(\theta) \cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}}, b \sin \theta + \frac{2\sqrt{3}r(\theta) \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}}\right) \end{aligned}$$

(ii)

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で O' は第一象限を動く。 $\theta = 0$ のとき、 O' は $(2\sqrt{3}b + r(0), 0)$ となるので、

$2\sqrt{3}b + r(0) = d$ である。 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、 O' は $(0, b + r(\frac{\pi}{2}))$ となるので、 $b + r(\frac{\pi}{2}) = d$ である。

O' が連続的に動くことから

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}b \cos \theta_1 + \frac{r(\theta_1) \cos \theta_1}{\sqrt{\cos^2 \theta_1 + 12 \sin^2 \theta_1}} = d \\ b \sin \theta_1 + \frac{2\sqrt{3}r(\theta_1) \sin \theta_1}{\sqrt{\cos^2 \theta_1 + 12 \sin^2 \theta_1}} = d \end{cases}$$

となる θ_1 ($0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$) が存在して、

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}b \cos \theta + \frac{r(\theta) \cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}} = d & (0 \leq \theta < \theta_1) \\ b \sin \theta + \frac{2\sqrt{3}r(\theta) \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}} = d & (\theta_1 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

となればよい。

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}b \cos \theta + \frac{r(\theta) \cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}} &= d \\ \Leftrightarrow (r(\theta) \cos \theta)^2 &= (d - 2\sqrt{3}b \cos \theta)^2 (\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

$$(\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

となる。 $d = \frac{11}{2}b$, $r(\theta) > 0$ より

$$r(\theta) = b \frac{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}}{\cos \theta} \left(\frac{11}{2} - 2\sqrt{3} \cos \theta\right)$$

となる。また、

$$\begin{aligned} b \sin \theta + \frac{2\sqrt{3}r(\theta) \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}} &= d \\ \Leftrightarrow (2\sqrt{3}r(\theta) \sin \theta)^2 &= (d - b \sin \theta)^2 (\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

$$(\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

となる。 $d = \frac{11}{2}b$, $r(\theta) > 0$ より

$$r(\theta) = b \frac{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}}{2\sqrt{3} \sin \theta} \left(\frac{11}{2} - \sin \theta\right)$$

となる。 $\theta = \theta_1$ のとき、

$$\begin{aligned} b \frac{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}}{\cos \theta} \left(\frac{11}{2} - 2\sqrt{3} \cos \theta\right) &= b \frac{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}}{2\sqrt{3} \sin \theta} \left(\frac{11}{2} - \sin \theta\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{11}{2} - 2\sqrt{3} \cos \theta\right) &= \frac{1}{2\sqrt{3} \sin \theta} \left(\frac{11}{2} - \sin \theta\right) \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \sin \theta \left(\frac{11}{2} - 2\sqrt{3} \cos \theta\right) &= \cos \theta \left(\frac{11}{2} - \sin \theta\right) \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \sin \theta &= \cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

となる。2乗して

$$\begin{aligned} 12 \sin^2 \theta &= (2 \sin \theta + 1)^2 \cos^2 \theta \\ \Leftrightarrow 12 \sin^2 \theta &= (2 \sin \theta + 1)^2 (1 - \sin^2 \theta) \\ \Leftrightarrow 4 \sin^4 \theta + 4 \sin^3 \theta + 9 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 \sin \theta - 1) (2 \sin^3 \theta + 3 \sin^2 \theta + 6 \sin \theta + 1) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $\sin \theta > 0$ より、 $2 \sin^3 \theta + 3 \sin^2 \theta + 6 \sin \theta + 1 > 0$ から $2 \sin \theta - 1 = 0$ となる。よって、 $0 \leq$

$\theta \leq \frac{\pi}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{6}$ となる。以上をまとめると

$$\begin{cases} r(\theta) = b \frac{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}}{\cos \theta} \left(\frac{11}{2} - 2\sqrt{3} \cos \theta\right) & (0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}) \\ r(\theta) = b \frac{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}}{2\sqrt{3} \sin \theta} \left(\frac{11}{2} - \sin \theta\right) & (\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

となる。

(答) 上記

(iii)

$\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき、

$$\begin{aligned} r\left(\frac{\pi}{6}\right) &= b \frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}}{2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}} \left(\frac{11}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{2} b \end{aligned}$$

となり、 $r\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\sqrt{5}}{2} b$ である。 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$ のとき、

$$\begin{aligned} r(\theta) &= b \frac{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}}{\cos \theta} \left(\frac{11}{2} - 2\sqrt{3} \cos \theta\right) \\ &= b \frac{\sqrt{12 - 11 \cos^2 \theta}}{\cos \theta} \left(\frac{11}{2} - 2\sqrt{3} \cos \theta\right) \end{aligned}$$

となる。ここで $s = \cos \theta$ とすると、 $\frac{\sqrt{3}}{2} < s \leq 1$ となり、

$$r(\theta) = b \times \frac{1}{s} \times \sqrt{12 - 11s^2} \times \left(\frac{11}{2} - 2\sqrt{3}s\right)$$

となるが、 $\frac{1}{s}$, $\sqrt{12 - 11s^2}$, $\frac{11}{2} - 2\sqrt{3}s$ はすべて s が増加するに従って減少する。よって $r(\theta)$ も

s が増加するに従って減少する。

$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} r(\theta) &= b \frac{\sqrt{\cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta}}{2\sqrt{3} \sin \theta} \left(\frac{11}{2} - \sin \theta\right) \\ &= b \frac{\sqrt{1 + 11 \sin^2 \theta}}{2\sqrt{3} \sin \theta} \left(\frac{11}{2} - \sin \theta\right) \end{aligned}$$

となる。ここで $t = \sin \theta$ とすると、 $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ となり、

$$r(\theta) = \frac{b}{2\sqrt{3}} \times \sqrt{11 + \frac{1}{t^2}} \times \left(\frac{11}{2} - t\right)$$

となるが、 $\sqrt{11 + \frac{1}{t^2}}$, $\frac{11}{2} - t$ はすべて t が増加するに従って減少する。よって $r(\theta)$ も

t が増加するに従って減少する。以上より最大値をとるときは $\theta = \frac{\pi}{6}$ であり、そのとき最大値

$$r\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\sqrt{5}}{2} b \text{ をとるので示せた。}$$

(証明終)