

(1)

(i)

「1回目と2回目に取り出した玉に書かれている文字が異なる確率」を求めるため、余事象である「1回目と2回目に取り出した玉に書かれた文字が同じである確率」を考える。袋に n 個の A が書かれている玉が入っていると仮定すると、1回目と2回目の玉に書かれている文字がともに A であるような取り出し方は n^2 通り、1回目と2回目の玉に書かれている文字がともに A 以外の同じ文字となる取り出し方は $(10-n) \cdot 1 = 10-n$ 通りとなる。全事象は 10^2 通りであるから、求める「1回目と2回目に取り出した玉に書かれている文字が異なる確率」は、

$$1 - \frac{n^2 + 10 - n}{10^2} = \frac{-n^2 + n + 90}{100}$$

となる。袋 α, β, γ において、それぞれ $n=1, 3, 5$ であるから、上記の式にそれぞれ代入すると、

$$\frac{-1^2 + 1 + 90}{100} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{-3^2 + 3 + 90}{100} = \frac{21}{25}$$

$$\frac{-5^2 + 5 + 90}{100} = \frac{7}{10}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \text{ 袋 } \alpha: \frac{9}{10}, \text{ 袋 } \beta: \frac{21}{25}, \text{ 袋 } \gamma: \frac{7}{10}$$

(ii)

(i)と同様に、袋に n 個の A が書かれた玉が入っていると仮定すると、1回目と3回目に取り出した玉に書かれた文字が同じである確率は、(i)の過程より $\frac{n^2 + 10 - n}{10^2}$ である。2回目と3回目の場合も同様である。ここで、玉に書かれた文字が3回とも全て同じである確率を同様に計算すると、

$$\frac{n^3 + (10-n) \cdot 1 \cdot 1}{10^3} = \frac{n^3 - n + 10}{10^3}$$

となるから、求める確率を n を用いて表すと、

$$\frac{n^2 + 10 - n}{10^2} \times 2 - \frac{n^3 - n + 10}{10^3} = \frac{-n^3 + 20n^2 - 19n + 190}{10^3}$$

となる。袋 α, β, γ において、それぞれ $n=1, 3, 5$ であるから、上記の式にそれぞれ代入すると、

$$\frac{-1^3 + 20 \cdot 1^2 - 19 \cdot 1 + 190}{10^3} = \frac{19}{100}$$

$$\frac{-3^3 + 20 \cdot 3^2 - 19 \cdot 3 + 190}{10^3} = \frac{143}{500}$$

$$\frac{-5^3 + 20 \cdot 5^2 - 19 \cdot 5 + 190}{10^3} = \frac{47}{100}$$

となる。

$$(\text{答}) \text{ 袋 } \alpha: \frac{19}{100}, \text{ 袋 } \beta: \frac{143}{500}, \text{ 袋 } \gamma: \frac{47}{100}$$

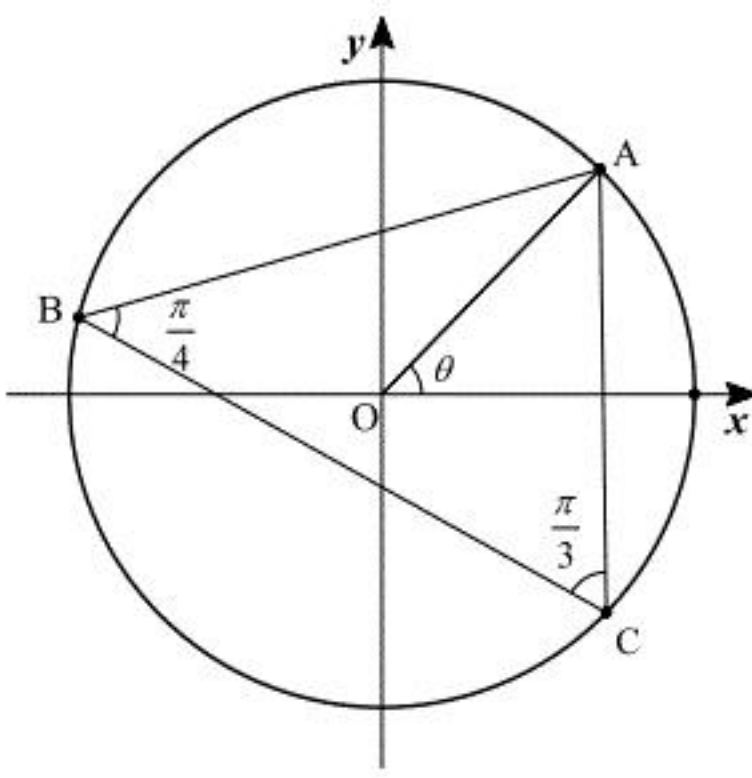
(2)

(i)

与えられた条件 $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$ より,

$$\angle CAB = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{5}{12}\pi$$

であるから, $\triangle ABC$ は鋭角三角形である。したがって, 状況を図示すると次の通りである。



ここで, 円周角と中心角の関係に着目すると,

$$\angle AOB = 2\angle ACB = \frac{2}{3}\pi, \angle AOC = 2\angle ABC = \frac{\pi}{2}$$

となる。したがって, 線分 OA, OB, OC と x 軸の正の方向がなす角はそれぞれ θ , $\theta + \frac{2}{3}\pi$,

$\theta - \frac{\pi}{2}$ であるから, 3 点 A, B, C の座標はそれぞれ

$$\begin{aligned} &A(\cos \theta, \sin \theta), \\ &B\left(\cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right), \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)\right), \\ &C\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad A(\cos \theta, \sin \theta), B\left(\cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right), \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)\right), C\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

(ii)

3 点 A, B, C の x 座標の和は, 加法定理などを用いて変形すると,

$$\begin{aligned} \cos \theta + \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos \theta + \cos \theta \cos \frac{2}{3}\pi - \sin \theta \sin \frac{2}{3}\pi + \sin \theta \\ &= \cos \theta - \frac{1}{2}\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \theta + \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}\left\{\cos \theta + (2 - \sqrt{3})\sin \theta\right\} \end{aligned}$$

となる。ここで, x 座標の和が 0 であるとき,

$$\cos \theta + (2 - \sqrt{3})\sin \theta = 0$$

が成り立つ。 $\cos \theta = 0$ は不適であるから, 両辺を $\cos \theta$ で割り整理すると,

$$\begin{aligned} 1 + (2 - \sqrt{3})\tan \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \tan \theta &= -\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad -2 - \sqrt{3}$$

(iii)

3 点 A, B, C の y 座標の和は, 加法定理などを用いて変形すると,

$$\begin{aligned} \sin \theta + \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin \theta + \sin \theta \cdot \cos \frac{2}{3}\pi + \cos \theta \cdot \sin \frac{2}{3}\pi - \cos \theta \\ &= \sin \theta - \frac{1}{2}\sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \theta - \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}\left\{\sin \theta - (2 - \sqrt{3})\cos \theta\right\} \end{aligned}$$

となる。よって, 求める和は,

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{2}\left\{\cos \theta + (2 - \sqrt{3})\sin \theta\right\}\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\left\{\sin \theta - (2 - \sqrt{3})\cos \theta\right\}\right]^2 \\ &= \frac{1}{4}\left\{\cos^2 \theta + (7 - 4\sqrt{3})\sin^2 \theta + \sin^2 \theta + (7 - 4\sqrt{3})\cos^2 \theta\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{(2 - \sqrt{3})\cos \theta \sin \theta - (2 - \sqrt{3})\cos \theta \sin \theta\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{1 + (7 - 4\sqrt{3})\right\} \\ &= 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 2 - \sqrt{3}$$

(3)

(i)

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$ であるから,

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} = s\overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$$

となる。四角形 ABCD は平行四辺形であるから, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ であることを用いると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OR} \\ &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \\ &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \\ &= \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \\ &= \overrightarrow{OA} - \frac{5}{4}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \overrightarrow{RP} = s\overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{RQ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{RD} = \overrightarrow{OA} - \frac{5}{4}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

(ii)

4 点 P, R, Q, D が同一平面上にあることから, p, q を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RD} &= p\overrightarrow{RP} + q\overrightarrow{RQ} \\ &= p\left(s\overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}\right) + q\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}\right) \\ &= ps\overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}(p+q)\overrightarrow{OB} + qt\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

と表せる。一方, (i) の結果より,

$$\overrightarrow{RD} = \overrightarrow{OA} - \frac{5}{4}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

である。 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ が 1 次独立であることから, 係数を比較すると,

$$ps = 1, -\frac{1}{4}(p+q) = -\frac{5}{4}, qt = 1$$

が成り立つ。ここから p, q を消去すると,

$$\begin{aligned}\frac{1}{s} + \frac{1}{t} &= 5 \\ \therefore s &= \frac{1}{5 - \frac{1}{t}} = \frac{t}{5t - 1}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad s = \frac{t}{5t - 1}$$

(iii)

$\triangle OPQ$ と $\triangle OAC$ の面積の比は, 2 辺の長さの積の比で求まるため, (ii) の結果を用いると,

$$\triangle OPQ : \triangle OAC = st : 1 = \frac{t^2}{5t - 1} : 1$$

となる。問題文の条件より, $\triangle OPQ$ の面積は $\triangle OAC$ の面積の $\frac{1}{6}$ であることから,

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{5t - 1} &= \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow 6t^2 - 5t + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2t - 1)(3t - 1) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。 $t = \frac{1}{2}$ のとき $s = \frac{1}{3}$ となり, $t = \frac{1}{3}$ のとき $s = \frac{1}{2}$ となる。

$$(答) \quad s = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

(4)

(i)

y 座標が 100 となることから, $ax^2 = 100$ となる。 $a > 0$ より $x = \pm \frac{10}{\sqrt{a}}$ である。

$$(\text{答}) \quad x = \pm \frac{10}{\sqrt{a}}$$

(ii)

実数 t を用いて点 P の座標を (t, at^2) とおくと, 点 Q の座標は $\left(\frac{t}{2}, \frac{at^2}{2}\right)$ と表せる。ここで, 点

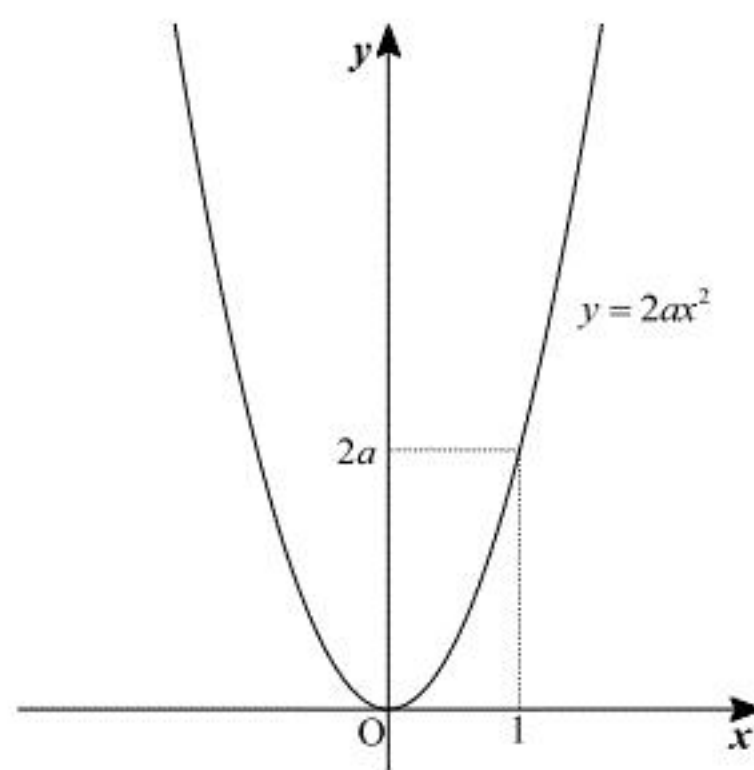
Q の座標を (X, Y) とおくと,

$$(X, Y) = \left(\frac{t}{2}, \frac{at^2}{2}\right)$$

であり, ここから t を消去すると,

$$Y = 2aX^2$$

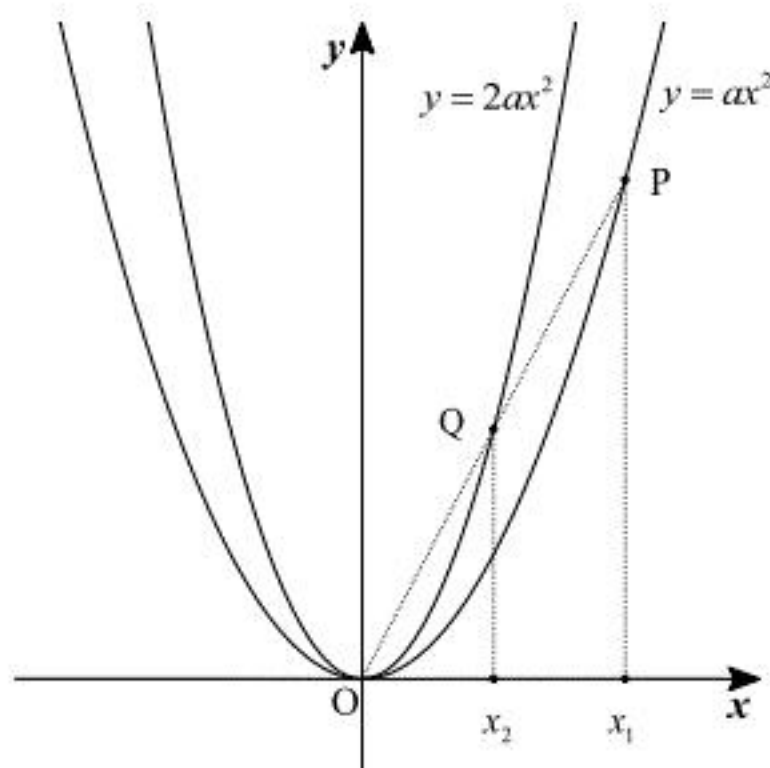
が導ける。ゆえに, 求める関係式は $y = 2ax^2$ であり, これを図示すると次のようになる。



(答) 軌跡の方程式: $y = 2ax^2$, 図: 前図

(iii)

関数 $y = ax^2$ および $y = 2ax^2$ と与えられた点を図示すると, 以下の図のようになる。



図より,

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{x_1} ax^2 dx \\ &= \left[\frac{ax^3}{3} \right]_0^{x_1} \\ &= \frac{ax_1^3}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{x_2} 2ax^2 dx \\ &= \left[\frac{2ax^3}{3} \right]_0^{x_2} \\ &= \frac{2ax_2^3}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで, $x_1 = 2x_2$ の関係が成り立つことに注意すると,

$$S_1 : S_2 = \frac{ax_1^3}{3} : \frac{2ax_2^3}{3} = \frac{8ax_2^3}{3} : \frac{2ax_2^3}{3} = 4 : 1$$

となる。

(答) 4:1

(5)

(i)

$$\left\{ \log \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \right\}' = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(ii)

$x = \sqrt{3}t$ と置換すると、与式は、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3t^2 + 3}} \sqrt{3} dt = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

となる。よって、(i)の結果を利用すると、

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} &= \log \left(t + \sqrt{t^2 + 1} \right) + C' \\ &= \log \left\{ \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) + \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1} \right\} + C' \\ &= \log \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{3}} \right) + C' \\ &= \log \left(x + \sqrt{x^2 + 3} \right) + C \end{aligned}$$

である。ここで、 C, C' は積分定数である。

$$(\text{答}) \quad \log \left(x + \sqrt{x^2 + 3} \right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(iii)

区分求積法と(i)の結果を利用すると、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{10n^2 + 6nk + k^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{10 + 6 \cdot \left(\frac{k}{n} \right) + \left(\frac{k}{n} \right)^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{10 + 6x + x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)^2 + 1}} dx \\ &= \left[\log \left\{ (x+3) + \sqrt{(x+3)^2 + 1} \right\} \right]_0^1 \\ &= \log \frac{4 + \sqrt{17}}{3 + \sqrt{10}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \log \frac{4 + \sqrt{17}}{3 + \sqrt{10}}$$

(6)

(i)

定められた $f(x), g(x)$ をそれぞれ1回微分すると,

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$
$$g'(x) = \frac{-2(x-a)\{1+(x-a)^2\} - \{1-(x-a)^2\} \cdot 2(x-a)}{\{1+(x-a)^2\}^2} = -\frac{4(x-a)}{\{1+(x-a)^2\}^2}$$

となる。 $f(x), g(x)$ それぞれの関数についての増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

増減表より, $f(x)$ は $x=1$ で, $g(x)$ は $x=a$ で極大となることから, $a=t=1$ である。

(答) $a=1, t=1$

(ii)

(i)の結果より,

$$g(x) = \frac{1-(x-1)^2}{1+(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x}{x^2-2x+2}$$

となる。ここで, $f(x)-g(x)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= \frac{2x}{1+x^2} - \frac{-x^2+2x}{x^2-2x+2} \\ &= \frac{2x(x^2-2x+2) - (-x^2+2x)(1+x^2)}{(1+x^2)(x^2-2x+2)} \\ &= \frac{x(x+2)(x-1)^2}{(1+x^2)(x^2-2x+2)} \end{aligned}$$

となる。よって, 共有点の x 座標は $x=-2, 0, 1$ であり, 共有点の座標は

$$\left(-2, -\frac{4}{5}\right), (0, 0), (1, 1)$$

(答) $\left(-2, -\frac{4}{5}\right), (0, 0), (1, 1)$

(iii)

(ii)の経過より, $x \geq 0$ のとき, $f(x)-g(x) \geq 0$ であり, $x=0, 1$ の場合に限り $f(x)=g(x)$ が成り立つ。ゆえに, 求める面積は,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{f(x)-g(x)\} dx &= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{-x^2+2x}{x^2-2x+2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx - \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{x^2-2x+2}\right) dx \\ &= \left[\log|1+x^2|\right]_0^1 - [-x]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{(x-1)^2+1} dx \\ &= \log 2 + 1 - \int_0^1 \frac{2}{(x-1)^2+1} dx \end{aligned}$$

となる。ここで, $x-1=\tan\theta$ と置換すると,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

であり, 積分範囲は次のように変化する。

x	0	$\rightarrow$	1
θ	$-\frac{\pi}{4}$	$\rightarrow$	0

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2}{(x-1)^2+1} dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{2}{\tan^2\theta+1} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 2d\theta \\ &= [2\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^0 \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

である。以上より, 求める面積は $\log 2 + 1 - \frac{\pi}{2}$ となる。

(答) $\log 2 + 1 - \frac{\pi}{2}$

(7)

(i)

法を11とする合同式を考える。 $8^1 \equiv 8, 8^2 \equiv 9, 8^3 \equiv 6, 8^4 \equiv 4, 8^5 \equiv 10$ より、 $8^{10} \equiv (8^5)^2 \equiv 100 \equiv 1$ とわかる。よって、 $8^{n+10} \equiv 8^n$ と導ける。これより、 $8^6 \equiv 3, 8^7 \equiv 2, 8^8 \equiv 5, 8^9 \equiv 7, 8^{10} \equiv 1$ も合わせて考えると、 8^n を11で割った余りは8, 9, 6, 4, 10, 3, 2, 5, 7, 1の順に周期10で繰り返す。ゆえに、 8^n を11で割った余りが3になる n は、 $n=10k+6$ (k は0以上の整数)と表せる。

(答) $n=10k+6$ (k は0以上の整数)

(ii)

法を17として合同式を考える。 $11^1 \equiv 11, 11^2 \equiv 2, 11^3 \equiv 5, 11^4 \equiv 4, 11^5 \equiv 10, 11^6 \equiv 8, 11^7 \equiv 3, 11^8 \equiv -1$ より、 $11^{16} \equiv (11^8)^2 \equiv 1$ とわかる。よって、 $11^{n+16} \equiv 11^n$ と導ける。これより、 $11^9 \equiv 6, 11^{10} \equiv 15, 11^{11} \equiv 12, 11^{12} \equiv 13, 11^{13} \equiv 7, 11^{14} \equiv 9, 11^{15} \equiv 14, 11^{16} \equiv 1$ も合わせて考えると、 11^n を17で割った余りは11, 2, 5, 4, 10, 8, 3, 16, 6, 15, 12, 13, 7, 9, 14, 1の順に周期16で繰り返す。ゆえに、 11^n を17で割った余りが4になる n は、 $n=16l+4$ (l は0以上の整数)と表せる。

(答) $n=16l+4$ (l は0以上の整数)

(iii)

(i)と(ii)の条件をともに満たすとき、

$$n=10k+6=16l+4$$

$$\therefore 8l-5k=1$$

が成り立つ。まず、 $l=-3, k=-5$ の組は、 $8 \cdot (-3) - 5 \cdot (-5) = 1$ より $8l-5k=1$ の解である。次に、 $8l-5k=1$ の両辺から $8 \cdot (-3) - 5 \cdot (-5) = 1$ の両辺を引くと、

$$8(l+3) - 5(k+5) = 0 \Leftrightarrow 8(l+3) = 5(k+5)$$

となる。5, 8は互いに素であるから、 $l+3$ は5の倍数となり、 $l+3=5m$ (m は自然数)と表せる。このとき、 $k+5=8m$ である。よって、 $(k, l) = (8m-5, 5m-3)$ より、条件を満たす n は

$$n=10k+6=10 \cdot (8m-5) + 6 = 80m-44$$

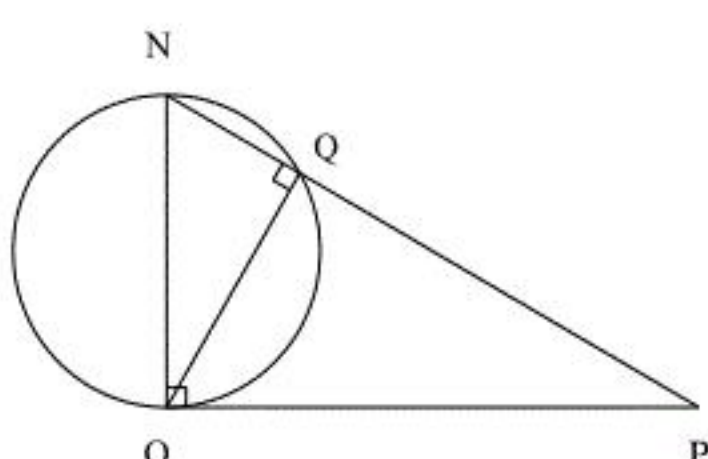
である。

(答) $n=80m-44$ (m は自然数)

(8)

(i)

問題文の条件より、3点O, N, Pを通る断面図を図示すると、以下のようになる。



直線ONは球Sの直径であるから、 $\angle NQO = 90^\circ$ である。また、 $\angle NOP = 90^\circ$ であり、 $\angle ONQ$ が共通であることから、 $\triangle NOQ \sim \triangle NPO$ である。よって、

$$NO : NQ = NP : NO$$

$$\therefore NQ = \frac{NO^2}{NP}$$

となる。ここで、

$$NP = \sqrt{a^2 + b^2 + (0-2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 4}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NQ} \\ &= \overrightarrow{ON} + \frac{NQ}{NP} \overrightarrow{NP} \\ &= \overrightarrow{ON} + \frac{NO^2}{NP^2} \overrightarrow{NP} \\ &= (0, 0, 2) + \frac{4}{a^2 + b^2 + 4} (a, b, -2) \\ &= \left(\frac{4a}{a^2 + b^2 + 4}, \frac{4b}{a^2 + b^2 + 4}, \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2 + 4} \right)\end{aligned}$$

となる。よって、点Qの座標は、 $\left(\frac{4a}{a^2 + b^2 + 4}, \frac{4b}{a^2 + b^2 + 4}, \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2 + 4} \right)$ である。

$$(\text{答}) \quad Q \left(\frac{4a}{a^2 + b^2 + 4}, \frac{4b}{a^2 + b^2 + 4}, \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2 + 4} \right)$$

(ii)

(i)の過程より、

$$NQ = \frac{NO^2}{NP} = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + 4}}$$

であるから、 $a^2 + b^2$ が最小、すなわち線分OPの長さが最小となるとき、線分NQの長さは最大となる。ここで、点Pは直線AB上の点であるから、 k を任意の実数として、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB} \\ &= (2, 0, 0) + k \left(-2, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ &= \left(2 - 2k, \frac{1}{\sqrt{2}}k, 0 \right)\end{aligned}$$

と表せる。ゆえに、

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= |\overrightarrow{OP}|^2 \\ &= (2 - 2k)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}k \right)^2 + 0 \\ &= \frac{9}{2}k^2 - 8k + 4 \\ &= \frac{9}{2} \left(k - \frac{8}{9} \right)^2 + \frac{4}{9}\end{aligned}$$

より、 $a^2 + b^2$ は $k = \frac{8}{9}$ のときに最小値 $\frac{4}{9}$ をとる。このとき、点Pの座標は $P \left(\frac{2}{9}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, 0 \right)$ であ

り、求める線分NQの長さの最大値は、

$$NQ = \frac{4}{\sqrt{\frac{4}{9} + 4}} = \frac{6\sqrt{10}}{10}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{線分NQの長さの最大値: } \frac{6\sqrt{10}}{10}, P \left(\frac{2}{9}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, 0 \right)$$

(iii)

$$\begin{aligned}QP &= NP - NQ \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + 4} - \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + 4}}\end{aligned}$$

と表せる。上式は $a^2 + b^2$ に関して単調増加であるから、 $a^2 + b^2$ が最小となる場合に線分QPの長さは最小となる。ここで、 $a^2 + b^2$ は(ii)で求めた点Pにおいて最小となることから、線分QPの長さも(ii)で求めた点Pにおいて最小となる。

(証明終)