

(1)

(i)

方程式 $x^3 + ax^2 + 26x - 24 = 0$ が $x = 2$ を解にもつとき、

$$2^3 + 2^2 \cdot a + 26 \cdot 2 - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a + 36 = 0$$

$$\therefore a = -9$$

となる。また、このとき方程式の他の解は、

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 7x + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 2, 3, 4$$

より、 $x = 3, 4$ となる。

(答) $a = -9$, 他の解: $x = 3, 4$

(ii)

くじを1本引く引き方は同様に確からしい。最初の1本が当たる確率は、10本中3本が当たり

くじであることから、 $\frac{3}{10}$ である。また、このとき最初の1本で当たりくじが引かれているの

で、9本中2本が当たりくじであることから、次の1本も当たる確率は、 $\frac{2}{9}$ である。よって、2

本とも当たる確率は、 $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$ となる。

(答) $\frac{1}{15}$

(iii)

$\log_{\frac{1}{2}} x$ は $\frac{1}{2} < 1$ であることより、 x について単調減少する。 $\frac{7}{2} - \frac{10}{3} = \frac{21-20}{6} = \frac{1}{6} > 0$ より、

$\frac{7}{2} > \frac{10}{3}$ である。また、 $\frac{10}{3}, \sqrt{11}$ は正であるから、 $\left(\frac{10}{3}\right)^2 - (\sqrt{11})^2 = \frac{100-99}{9} = \frac{1}{9} > 0$ であることよ

り、 $\frac{10}{3} > \sqrt{11}$ である。よって、 $\frac{7}{2} > \frac{10}{3} > \sqrt{11}$ である。以上より、 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{7}{2} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{10}{3} < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{11}$ となる。

(答) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{7}{2} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{10}{3} < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{11}$

(iv)

求める和は、

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21 &= \sum_{k=1}^{20} k(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k \\ &= \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot (20+1) \cdot (2 \cdot 20 + 1) + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (20+1) \\ &= 2870 + 210 \\ &= 3080 \end{aligned}$$

となる。

(答) 3080

(2)

(i)

$y=2x^2$ について、 $y'=4x$ である。よって、点 $(t, 2t^2)$ における放物線 $C: y=2x^2$ の接線は、

$$y=4t(x-t)+2t^2 \Leftrightarrow y=4tx-2t^2$$

となる。

(答) $y=4tx-2t^2$

(ii)

(i)で求めた接線が $(0, -2)$ を通るとき、

$$-2=4t \cdot 0 - 2t^2 \Leftrightarrow t=\pm 1$$

である。これを、(i)の接線の式に代入すると、求める接線の方程式は、

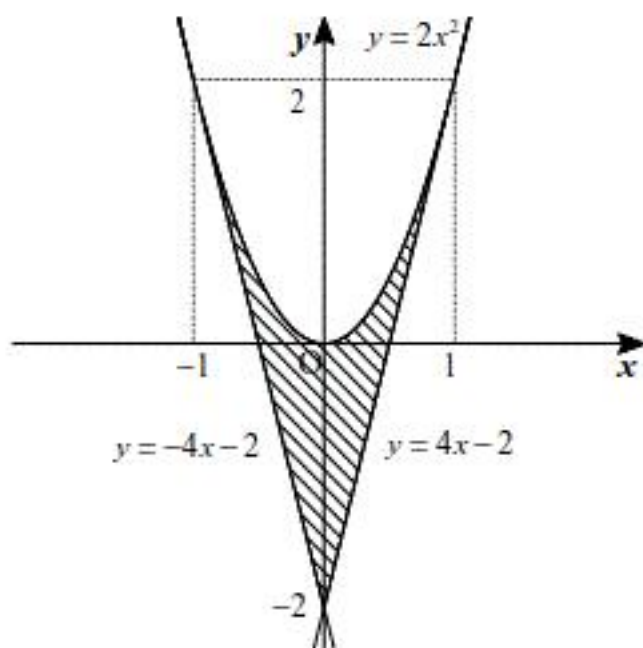
$$t=1 \text{ のとき、} y=4x-2, \quad t=-1 \text{ のとき、} y=-4x-2$$

となる。

(答) $y=4x-2, y=-4x-2$

(iii)

放物線 C と(ii)の2本の接線を図示すると下図を得る。ここで、求める面積 S は下図斜線部の面積である。



これは、点 $(1, 2)$ 、点 $(-1, 2)$ と点 $(0, -2)$ を頂点とする三角形から、 $y=2$ と放物線 $C: y=2x^2$ で囲まれた部分を引いたものである。三角形の面積は、 $\frac{1}{2} \cdot \{1 - (-1)\} \cdot \{2 - (-2)\} = 4$ である。また、 $y=2$ と放物線 $C: y=2x^2$ で囲まれた部分の面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (2-2x^2) dx &= \left[2x - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^1 \\ &= \left(2 \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 1^3 \right) - \left\{ 2 \cdot (-1) - \frac{2}{3} \cdot (-1)^3 \right\} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

である。以上より、求める面積 S は、

$$S = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

となる。

(答) $\frac{4}{3}$

(3)

(i)

それぞれの不等式について、

$$\begin{cases} 2x+y \geq 8 \\ x-y \leq 2 \\ y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2x-8 \\ y \geq x-2 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

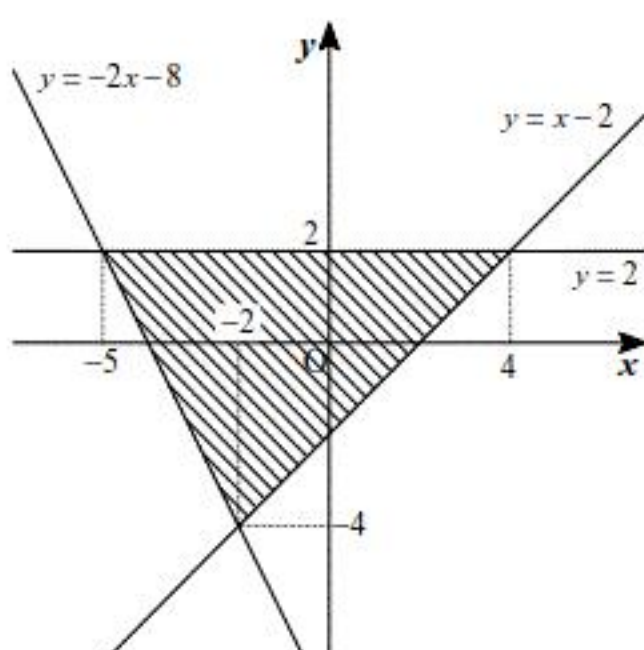
となる。ここで、

$$y = -2x - 8 \quad \dots\dots ①$$

$$y = x - 2 \quad \dots\dots ②$$

$$y = 2 \quad \dots\dots ③$$

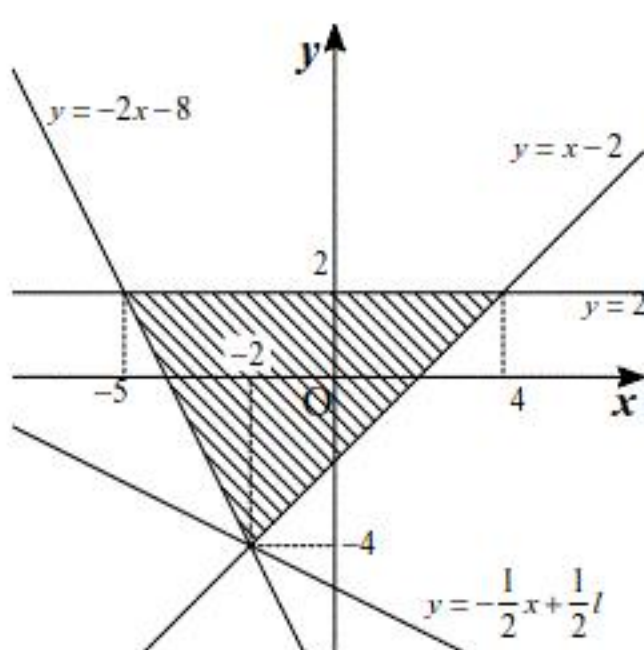
とおく。①と②の交点の x 座標は、式を連立して y を消去すると、 $-2x-8=x-2 \Leftrightarrow x=-2$ であり、これを①に代入すると、 $y=-2 \cdot (-2)-8=-4$ となることから、交点の座標は $(-2, -4)$ である。同様に計算すると、①と③の交点の座標は $(-5, 2)$ であり、②と③の交点の座標は $(4, 2)$ である。以上より、図示すると、求める領域 D は下図斜線部になる。ただし、境界は含む。



(答) 前図斜線部(境界は含む)

(ii)

$x+2y=l$ とおく。このとき、直線 $x+2y=l \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}l$ が領域 D と交わるとき l の最小値を求めればよい。直線 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}l$ の傾き $-\frac{1}{2}$ は、直線 $y=-2x-8$ の傾き -2 より絶対値が小さいことを踏まえると、直線 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}l$ の y 切片が最小になるときの直線①、②、③、 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}l$ 、領域 D を図示すると下図を得る。

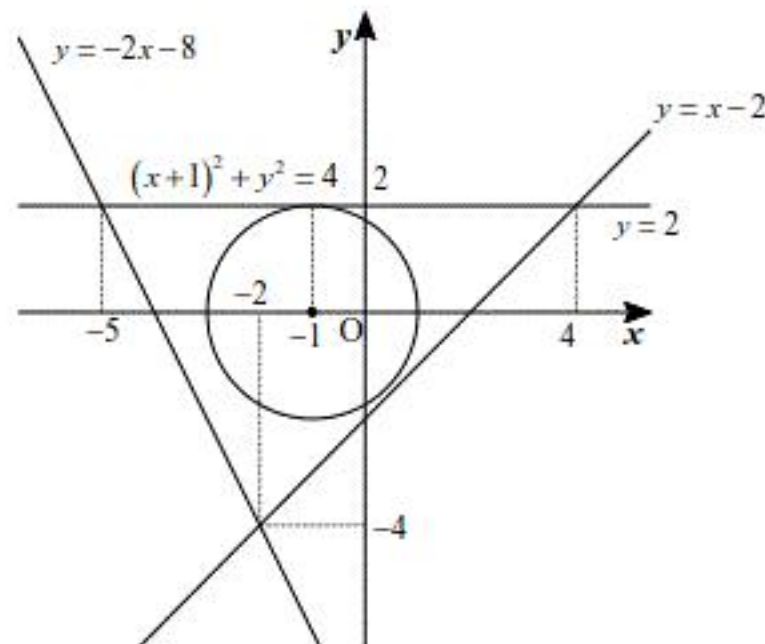


したがって、直線 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}l$ の y 切片が最小になるのは点 $(-2, -4)$ を通るときである。よって、求める最小値は、 $-2+2 \cdot (-4)=-10$ となる。

(答) -10

(iii)

円 $x^2+2x+y^2=k \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=k+1$ は、点 $(-1, 0)$ 中心の半径 $\sqrt{k+1}$ の円である。ここで、円の半径は正の実数であることから、 $k+1>0 \Leftrightarrow k>-1$ である。 $(-1, 0)$ と直線 $y=-2x-8$ の距離は $\frac{|(-1) \cdot (-2)+0 \cdot (-1)-8|}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 、点 $(-1, 0)$ と直線 $y=x-2$ の距離は $\frac{|(-1) \cdot 1+0 \cdot (-1)-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 、点 $(-1, 0)$ と直線 $y=2$ の距離は $2-0=2$ である。 $\frac{6\sqrt{5}}{5}>\frac{6 \cdot 2}{5}>2$ 、 $\frac{3\sqrt{2}}{2}>\frac{3 \cdot 1.4}{2}>2$ であることより、点 $(-1, 0)$ と領域 D の境界の最短距離は 2 である。円の半径が 2 より大きいときは、円上の点 $(-1, \sqrt{k+1})$ が $y \leq 2$ を満たさず、領域 D に含まれないので、不適である。一方、円の半径が 2 のとき、点 $(-1, 0)$ と円上の点の距離は、必ず点 $(-1, 0)$ と領域 D の境界上の点の距離以下であるので、以下の領域 D と円 $(x+1)^2+y^2=4$ を表した図から円上のすべての点は領域 D に含まれることがわかる。



よって、円 $x^2+2x+y^2=k$ 上のすべての点が領域 D に含まれるような定数 k が最大となるのは、円の半径が最大となるときであり、円の半径が 2 のときである。したがって、求める k の最大値は $\sqrt{k+1}=2 \Leftrightarrow k=3$ となる。

(答) $k=3$

(4)

(i)

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は 1 次独立であることより, $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB}$ とおくことができる。このとき,

$$(3, 4) = k(2, 1) + l(1, 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2k + l \\ 4 = k + 2l \end{cases}$$

$$\therefore (k, l) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

である。よって, $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$$

(ii)

$|\overrightarrow{OA}|^2 = 2^2 + 1^2 = 5$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$ である。 $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{OA}$ が直交するとき,

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$\Leftrightarrow t\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - |\overrightarrow{OA}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4t - 5 = 0$$

$$\therefore t = \frac{5}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{5}{4}$$

(iii)

$|\overrightarrow{OB}|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ である。点 P は直線 OA 上の点であるから, 実数 s を用いて $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA}$ とおける。すると, 点 P の座標は $(2s, s)$ である。また, $\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{DP}$ の内積が負となるとき,

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{DP} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}\overrightarrow{OB} \cdot \left(s\overrightarrow{OA} - \frac{5}{4}\overrightarrow{OB}\right) < 0$$

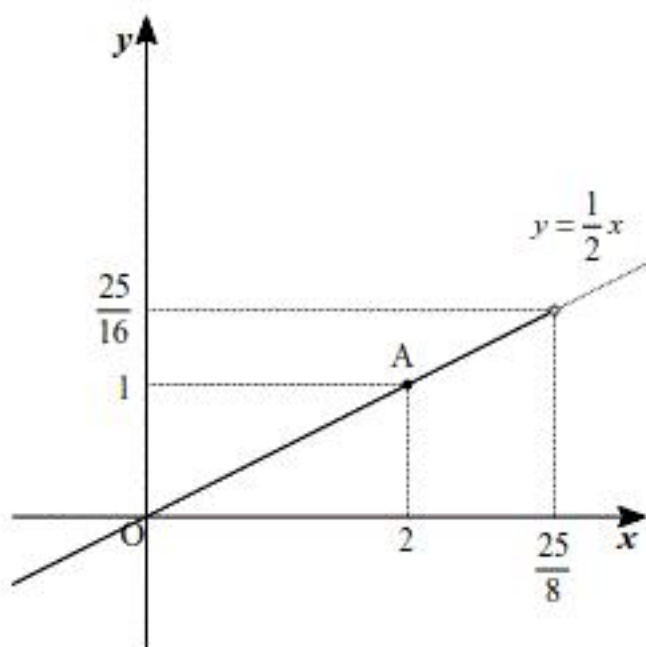
$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}s\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \frac{25}{16}|\overrightarrow{OB}|^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 5s - \frac{125}{16} < 0$$

$$\therefore s < \frac{25}{16}$$

となる。よって, 点 P の x 座標について $2s < 2 \cdot \frac{25}{16} = \frac{25}{8}$ であるので, 点 P の存在範囲は

$y = \frac{1}{2}x \left(x < \frac{25}{8}\right)$ となる。図示すると求める点 P の存在範囲は下図実線部になる。ただし端点は含まない。



(答) 前図実線部(端点は含まない)

(5)

(i)

$f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ である。ここで、 $0 \leq x < 2\pi$ より、 $-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3}$ であ

る。よって、 $f(x) = -1 \Leftrightarrow 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$ のとき、 $x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ となる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$$

(ii)

$y = a \sin x$ のグラフを x 軸方向に b だけ平行移動したグラフの式は、 $y = a \sin(x - b)$ である。

これが、 $y = f(x) \Leftrightarrow y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ と一致するので、これを満たす a, b の値の組のうちの一

つは $(a, b) = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ となる。これは、確かに条件 $a > 0, -\pi < b \leq \pi$ を満たす。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$$

(iii)

どのような x に対しても $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = 4$ が成り立つとき、

$$\begin{aligned} \{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow \{g(x)\}^2 &= 4 - \left\{2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right\}^2 \\ \Leftrightarrow \{g(x)\}^2 &= 4 \left\{1 - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right\} \\ \Leftrightarrow \{g(x)\}^2 &= 4 \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow g(x) &= \pm 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\ \therefore g(x) &= \pm (\sqrt{3} \sin x + \cos x) \end{aligned}$$

である。 $g(x) = c \sin x + d \cos x$ であるので、 $c \sin x + d \cos x = \pm (\sqrt{3} \sin x + \cos x)$ が x についての

恒等式となるとき、 $(c, d) = (\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, -1)$ となる。

$$(\text{答}) \quad (c, d) = (\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, -1)$$

(6)

(i)

$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ のとき、 $f'(x)=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$ である。ここで、

$x=-1, 1$ のとき $f'(x)=0$ となる。このことから、増減表をかくと、以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって、 $x=-1$ のとき、極小値 $\frac{-1}{1+(-1)^2}=-\frac{1}{2}$ 、 $x=1$ のとき、極大値 $\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2}$ をとる。

(答) 極小値 $-\frac{1}{2}$ ($x=-1$)、極大値 $\frac{1}{2}$ ($x=1$)

(ii)

点 $(a, f(a))$ における $y=f(x)$ の接線の傾きは、 $f'(a)=\frac{1-a^2}{(1+a^2)^2}$ である。これと平行な接線に

ついて接点の x 座標を t とおくと、その接点における接線の傾きは $f'(t)=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ であるの

で、 $\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{1-a^2}{(1+a^2)^2}$ である。よって、もとの接線と平行な接線が3本存在するとき、どの接

線も2つ以上の接点で接することがないことから、 t についての方程式、 $\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{1-a^2}{(1+a^2)^2}$

は a 以外に3つ、 a を入れると4つの実数解を持つ。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} &= \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2} \\ \Leftrightarrow (1-a^2)(1+t^2)^2 - (1+a^2)^2(1-t^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-a^2)t^4 + (a^4+3)t^2 - (a^4+3a^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-a)\{(1-a^2)t^3 + a(1-a^2)t^2 + (a^2+3)t + (a^3+3a)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-a)(t+a)\{(1-a^2)t^2 + (a^2+3)\} &= 0\end{aligned}$$

となる。これが4つの実数解を持つのは、方程式 $(1-a^2)t^2 + (a^2+3) = 0$ が $t=\pm a$ 以外に実数解を

2つもつときである。まず、 $t=\pm a$ を解に持たない条件を求める。 $t=\pm a$ を解に持つのは、

$$\begin{aligned}(1-a^2)a^2 + (a^2+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow -(a^2-3)(a^2+1) &= 0 \\ \therefore a &= \pm\sqrt{3}\end{aligned}$$

のときなので、 $t=\pm a$ を解に持たない条件は $a \neq \pm\sqrt{3}$ である。また、

$g(x)=(1-a^2)x^2 + (a^2+3)$ とおくと、 $y=g(x)$ が2つ実数解をもつ条件は、2次の係数が0で

ない、かつ $g(x)=0$ の判別式を D としたときに $D>0$ となることである。よって、

$$1-a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$$

かつ、

$$\begin{aligned}D &> 0 \\ \Leftrightarrow -4(1-a^2)(a^2+3) &> 0 \\ \Leftrightarrow 1-a^2 < 0 \quad (\because a^2+3 > 0) \\ \Leftrightarrow a &< -1, 1 < a\end{aligned}$$

が条件である。以上より、求める a の範囲は、 $a < -\sqrt{3}, -\sqrt{3} < a < -1, 1 < a < \sqrt{3}, \sqrt{3} < a$ となる。

(答) $a < -\sqrt{3}, -\sqrt{3} < a < -1, 1 < a < \sqrt{3}, \sqrt{3} < a$

(7)

(i)

カードを1枚引く引き方は同様に確からしい。1枚目を取り出すときには偶数は20枚中10枚

あるので、偶数を取り出す確率は $\frac{10}{20}$ である。2枚目を取り出すときには奇数は19枚中10枚

あるので、奇数を取り出す確率は $\frac{10}{19}$ である。以下同様に、3枚目で偶数を取り出す確率は

$\frac{10-1}{19-1} = \frac{9}{18}$ 、4枚目で偶数を取り出す確率は $\frac{9-1}{18-1} = \frac{8}{17}$ 、5枚目で奇数を取り出す確率は

$\frac{10-1}{17-1} = \frac{9}{16}$ である。以上より、求める確率は、

$$\frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} \cdot \frac{9}{18} \cdot \frac{8}{17} \cdot \frac{9}{16} = \frac{45}{1292}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{45}{1292}$$

(ii)

20枚中5枚を同時に取り出すことを考えると、その取り出し方は ${}_{20}C_5$ 通りであり、これらは

同様に確からしい。また、取り出した5枚のうち偶数が3枚であるのは、奇数も2枚取り出す

ことになることから、 ${}_{10}C_3 \cdot {}_{10}C_2$ 通りである。よって、求める確率は、 $\frac{{}_{10}C_3 \cdot {}_{10}C_2}{{}_{20}C_5} = \frac{225}{646}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{225}{646}$$

(iii)

20枚のカードから続けて3枚取り出したときに、ちょうど2枚が赤である事象をA、カードの番号が、偶数、奇数、偶数の順番である事象をBとする。まず、Aが起こる確率 $P(A)$ を求め

る。順番を気にしないで取り出すことを考えると、全体の取り出し方は ${}_{20}C_3$ 通りである。

また、赤は20枚中9枚あることより、赤が2枚取り出されるのは、赤ではないカードも1枚

取り出されることを考えて、 ${}_9C_2 \cdot {}_{11}C_1$ 通りである。よって、 $P(A) = \frac{{}_9C_2 \cdot {}_{11}C_1}{{}_{20}C_3}$ となる。次に、A

もBも起きる確率 $P(A \cap B)$ を求める。順番も考慮した全体の取り出し方は、 ${}_{20}P_3$ 通りである。

そのうちAもBも起きる取り出し方を考えるために、赤ではないカードが何番目に取り出されるかで場合分けをする。

[1] 赤ではないカードが1番目に取り出されるとき

1枚目が赤ではない偶数、2枚目が赤の奇数、3枚目が赤の偶数であるので、取り出し方は $(10-6) \cdot 3 \cdot 6 = 72$ 通りである。

[2] 赤ではないカードが2番目に取り出されるとき

1枚目が赤の偶数、2枚目が赤ではない奇数、3枚目が赤の偶数であるので、取り出し方は $6 \cdot (10-3) \cdot (6-1) = 210$ 通りである。

[3] 赤ではないカードが3番目に取り出されるとき

1枚目が赤の偶数、2枚目が赤の奇数、3枚目が赤ではない偶数であるので、取り出し方は $6 \cdot 3 \cdot (10-6) = 72$ 通りである。

以上[1], [2], [3]合わせて、 $72+210+72=354$ 通りである。よって、 $P(A \cap B) = \frac{354}{{}_{20}P_3}$ となる。以

上より、Aが起きているときにBも起きている条件付き確率 $P_A(B)$ は、

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{354}{{}_{20}P_3}}{\frac{{}_9C_2 \cdot {}_{11}C_1}{{}_{20}C_3}} \\ &= \frac{59}{396} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{59}{396}$$

(8)

(i)

$\alpha^2 + \alpha + 2 = 0$ のとき,

$$\begin{aligned} & (\alpha^3 - 2\alpha^2 - 1)(\alpha^4 - 2\alpha^3 - 5\alpha + 5) \\ &= \{(\alpha^2 + \alpha + 2)(\alpha - 3) + \alpha + 5\} \{(\alpha^2 + \alpha + 2)(\alpha^2 - 3\alpha + 1) + 3\} \\ &= (\alpha + 5) \cdot 3 \quad (\because \alpha^2 + \alpha + 2 = 0) \\ &= 3\alpha + 15 \end{aligned}$$

である。ここで、 α について、 α を解とする x についての 2 次方程式 $x^2 + x + 2 = 0$ の判別式を D とおくと,

$$\begin{aligned} D &= 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \\ &= -7 \end{aligned}$$

より $D < 0$ であるので、 α は実数でない。したがって、 α は虚数かつ A, B は実数であることから、 $3\alpha + 15 = A\alpha + B$ であるとき、 $A = 3, B = 15$ となる。

(答) $A = 3, B = 15$

(ii)

(i)同様に,

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 - 1 = (\alpha^2 + \alpha + 2)(\alpha - 3) + \alpha + 5 = \alpha + 5$$

である。また,

$$\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1 = (\alpha^2 + \alpha + 2)(\alpha^3 - \alpha) + \alpha - 1 = \alpha - 1$$

である。ここで $\alpha = 1$ は $\alpha^2 + \alpha + 2 = 0$ を満たさないなので、 $\alpha - 1 \neq 0$ である。よって,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 - 1}{\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1} &= C\alpha + D \\ \Leftrightarrow \alpha + 5 &= (\alpha - 1)(C\alpha + D) \\ \Leftrightarrow \alpha + 5 &= C(\alpha^2 + \alpha + 2) + (D - 2C)\alpha - 2C - D \\ \Leftrightarrow (D - 2C)\alpha - 2C - D &= \alpha + 5 \quad (\because \alpha^2 + \alpha + 2 = 0) \end{aligned}$$

となる。 α は虚数かつ C, D は実数であることを踏まえて,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} D - 2C = 1 \\ -2C - D = 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} C = -\frac{3}{2} \\ D = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

(答) $C = -\frac{3}{2}, D = -2$

(9)

(i)

$z_1 = a + bi$ とおく。ただし、 a, b は実数である。ここで、 $z_1 + z_2 = \frac{3}{2}$ より $z_2 = \left(\frac{3}{2} - a\right) - bi$ である。

$|z_1| = |z_2| = 1$ より、 $|z_1|^2 = |z_2|^2 = 1$ であるので、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ \left(\frac{3}{2} - a\right)^2 + b^2 = 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 1 - a^2 \\ \frac{9}{4} - 3a + a^2 + 1 - a^2 = 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 1 - a^2 \\ a = \frac{3}{4} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm \frac{\sqrt{7}}{4} \\ a = \frac{3}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。以上より、 $(z_1, z_2) = \left(\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i, \frac{3}{4} \mp \frac{\sqrt{7}}{4}i\right)$ (複号同順) となる。

$$(\text{答}) (z_1, z_2) = \left(\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i, \frac{3}{4} \mp \frac{\sqrt{7}}{4}i\right) \text{ (複号同順)}$$

(ii)

与式の両辺に $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ をかけると、

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ \Leftrightarrow (z_1 + z_2) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ \Leftrightarrow \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_2 \right\} &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。また、 $\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$ より、複素数 $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_1, \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_2$ は、

$$\left| \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_1 \right| = |z_1| = 1, \left| \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_2 \right| = |z_2| = 1$$

を満たす。よって、(i) と同様に考えて、 $\left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_1, \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_2 \right\} = \left(\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i, \frac{3}{4} \mp \frac{\sqrt{7}}{4}i\right)$ であ

る。両辺に $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ をかけて、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_1 &= \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_1 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i\right) \\ \therefore z_1 &= \frac{3 \mp \sqrt{21}}{8} + \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{8}i \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_2 &= \frac{3}{4} \mp \frac{\sqrt{7}}{4}i \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_2 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{3}{4} \mp \frac{\sqrt{7}}{4}i\right) \\ \therefore z_2 &= \frac{3 \pm \sqrt{21}}{8} + \frac{3\sqrt{3} \mp \sqrt{7}}{8}i \end{aligned}$$

となる。ただし、符号は全て複号同順である。

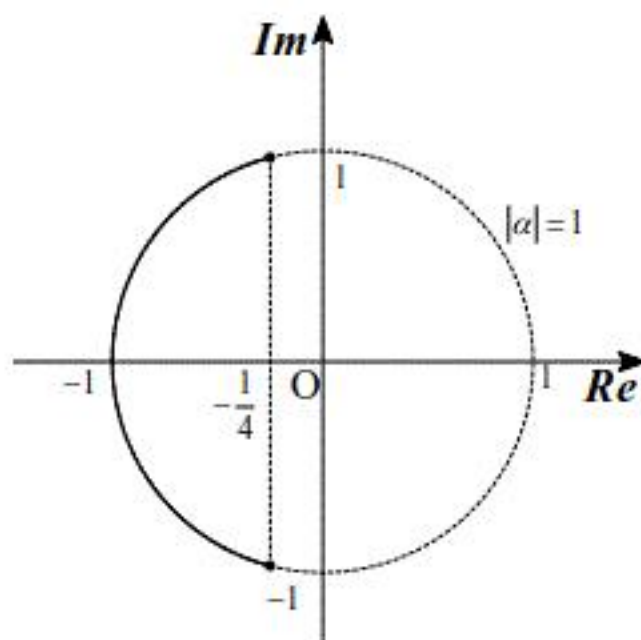
$$(\text{答}) (z_1, z_2) = \left(\frac{3 \mp \sqrt{21}}{8} + \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{8}i, \frac{3 \pm \sqrt{21}}{8} + \frac{3\sqrt{3} \mp \sqrt{7}}{8}i\right) \text{ (複号同順)}$$

(iii)

$z_1 + z_2 = 2 + \alpha$ より、 $z_2 = -z_1 + 2 + \alpha$ である。ここで、 $|z_1| = |z_2| = 1$ と $z_1 + z_2 = 2 + \alpha$ をともに満たす z_1, z_2 が存在することは $|z_1| = |z_1 - 2 - \alpha| = 1$ を満たす z_1 が存在することと同値である。このとき、複素数平面において $|z_1| = 1$ は原点中心の半径1の円を、 $|z_1 - 2 - \alpha| = 1$ は $\alpha + 2$ 中心の半径1の円をそれぞれ表す。したがって、 $|z_1| = |z_1 - 2 - \alpha| = 1$ を満たす z_1 はこれらの円の共有点であるため、そのような z_1 が存在するための必要十分条件は $|\alpha + 2| \leq 2$ である。また、問題文から $|\alpha| = 1$ であるので、 $\alpha \bar{\alpha} = 1$ となる。このことから、 α の条件は、

$$\begin{aligned} \begin{cases} |\alpha| = 1 \\ |\alpha + 2| \leq 2 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha| = 1 \\ \alpha \bar{\alpha} + 2\alpha + 2\bar{\alpha} + 4 \leq 4 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha| = 1 \\ 2\alpha + 2\bar{\alpha} \leq -1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha| = 1 \\ \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} \leq -\frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。 $\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}$ は α の実部を表すので、 α の動く範囲は下図の実線部分である。ただし、端点を含む。



(答) 前図