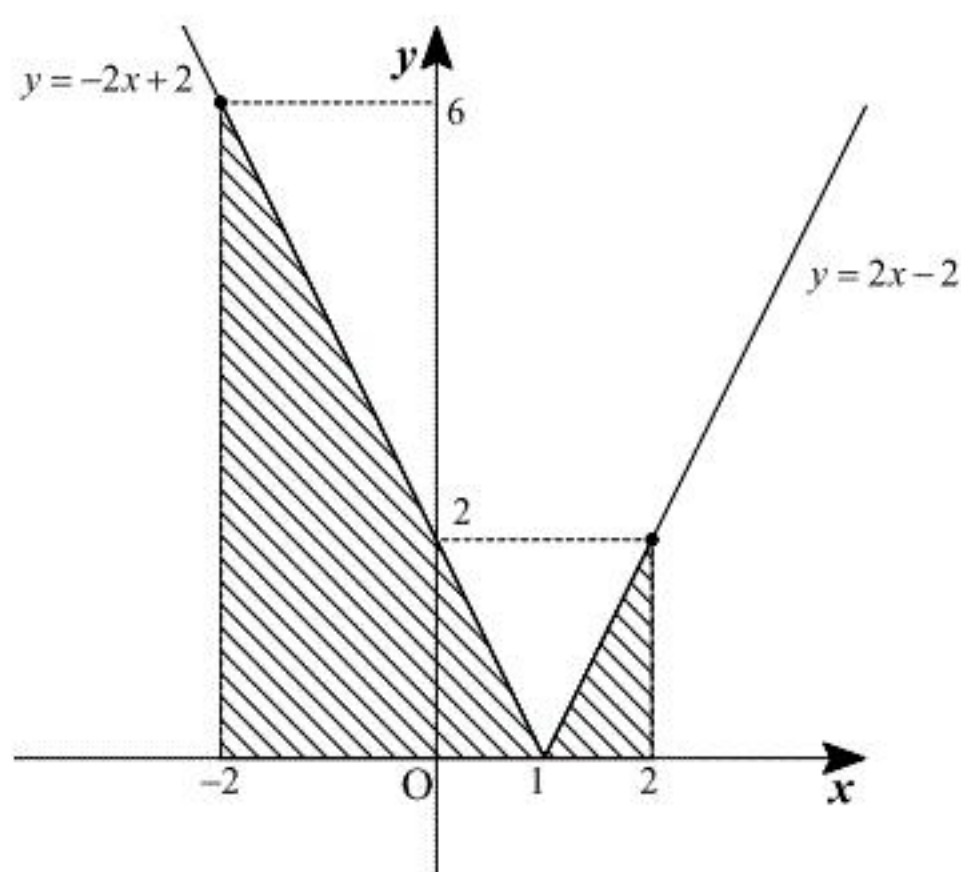


(1)

(i)

求める値は、下图の斜線部の面積に等しい。



前図より、その値は

$$\frac{1}{2} \cdot \{1 - (-2)\} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot (2 - 1) \cdot 2 = 10$$

となる。

(答) 10

(ii)

$f(x)$ が $x-3$ で割り切れるとき、因数定理より

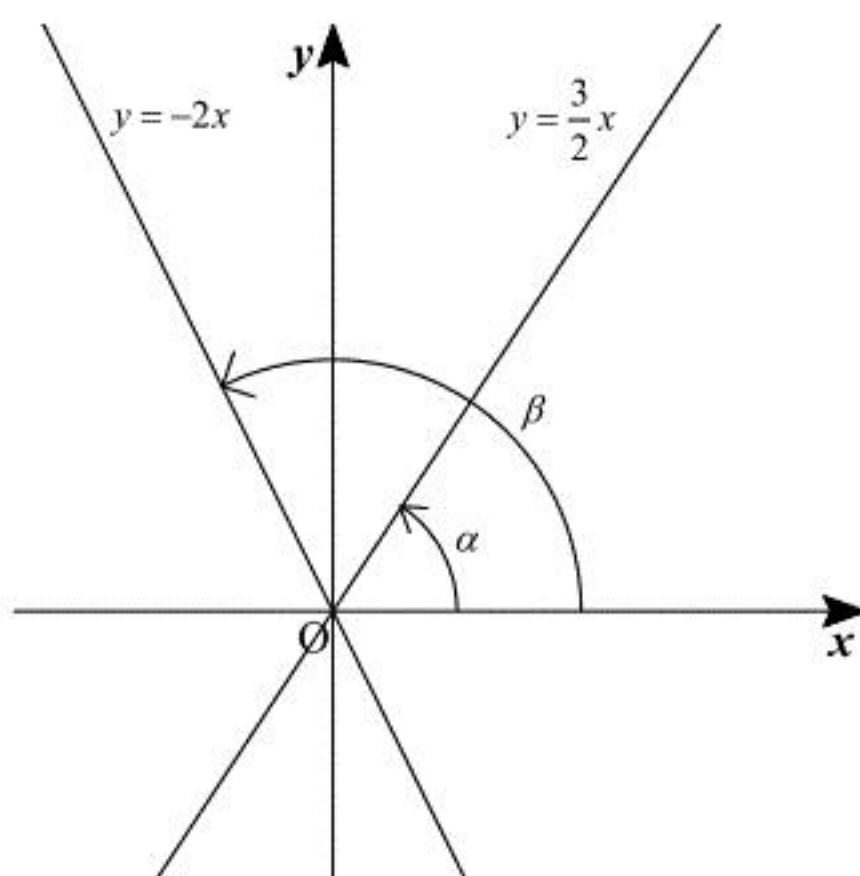
$$\begin{aligned} f(3) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3^3 - 2 \cdot 3^2 + a \cdot 3 + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3a + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -4 \end{aligned}$$

が成立する。

(答) $a = -4$

(iii)

次の図のように角度を設定する。



前図より $\tan \alpha = \frac{3}{2}$, $\tan \beta = -2$ となるから、求める値は

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\beta - \alpha) \\ &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{-2 - \frac{3}{2}}{1 + (-2) \cdot \frac{3}{2}} \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

となる。また、この値は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の条件を満たす。

(答) $\tan \theta = \frac{7}{4}$

(2)

(i)

$$f(x)=(x-2a)^2-a^2$$

より、 $y=f(x)$ のグラフの頂点の座標は $(2a, -a^2)$ である。

(答) $(2a, -a^2)$

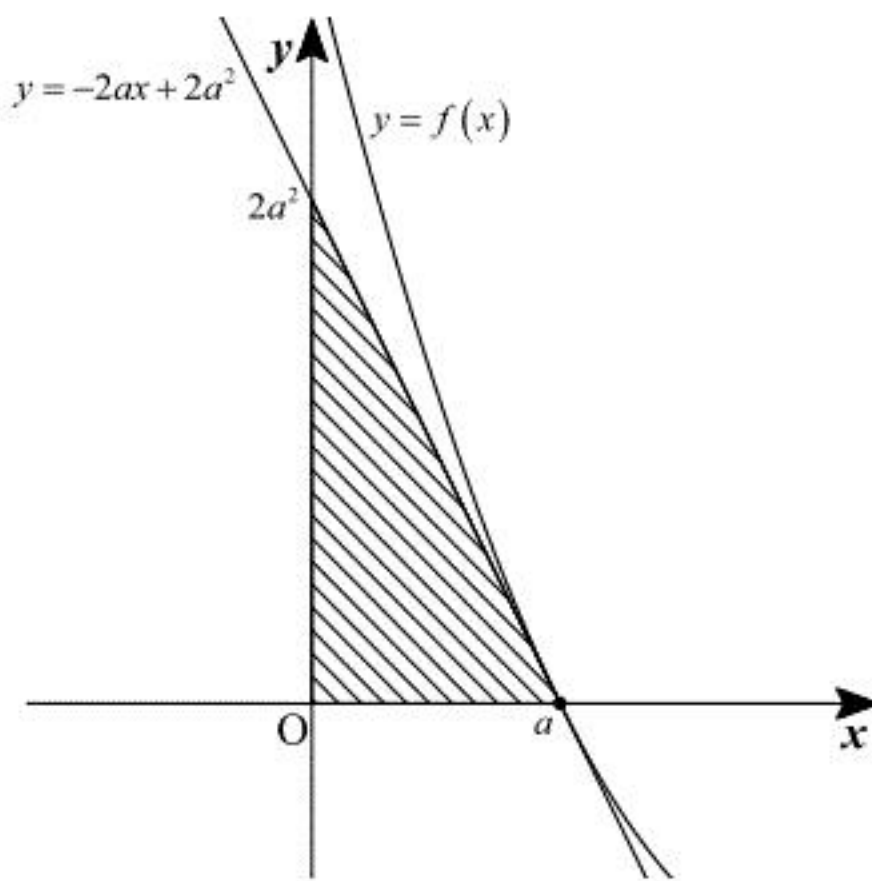
(ii)

$$f'(x)=2x-4a$$

より、点 $(a, f(a))$ における $y=f(x)$ の接線は

$$\begin{aligned} y &= (2a-4a)(x-a)+a^2-4a\cdot a+3a^2 \\ &\Leftrightarrow y=-2ax+2a^2 \end{aligned}$$

となる。この接線と x 軸および y 軸で囲まれた部分は、次の図の斜線部のようになる。



前図より、点 $(a, f(a))$ における $y=f(x)$ の接線と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2a^2=a^3$$

となるから、条件は

$$\begin{aligned} a^3 &= 8 \\ \therefore a &= 2 \quad (\because a>0) \end{aligned}$$

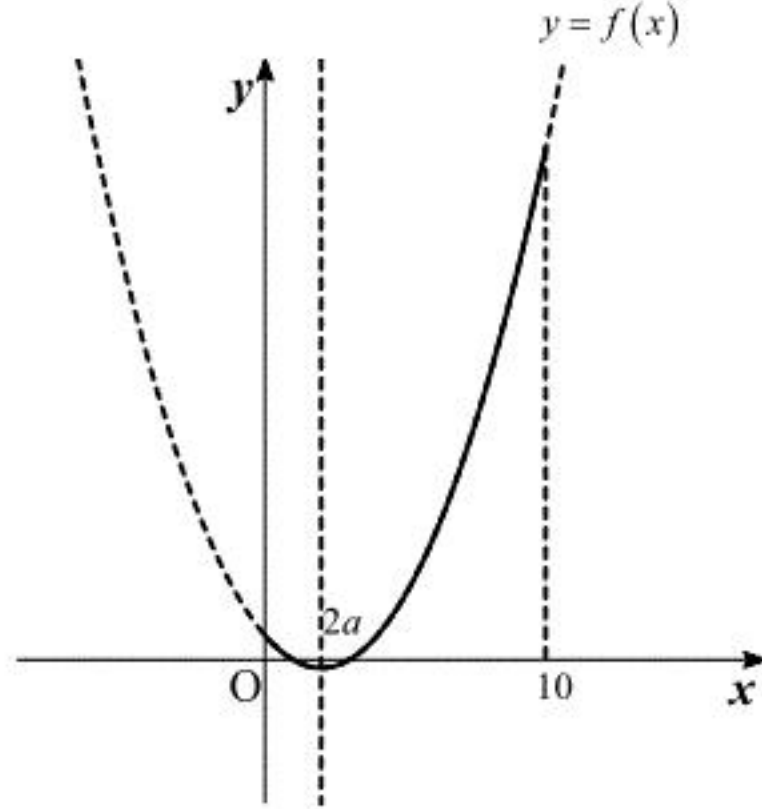
である。

(答) $a=2$

(iii)

放物線 $y=f(x)$ の軸 $x=2a$ の位置による場合分けを行う。

[1] $2a<5$ のとき



このとき、 $a<\frac{5}{2}$ となる。いま、 $0\leq x\leq 10$ での $y=f(x)$ の最大値は

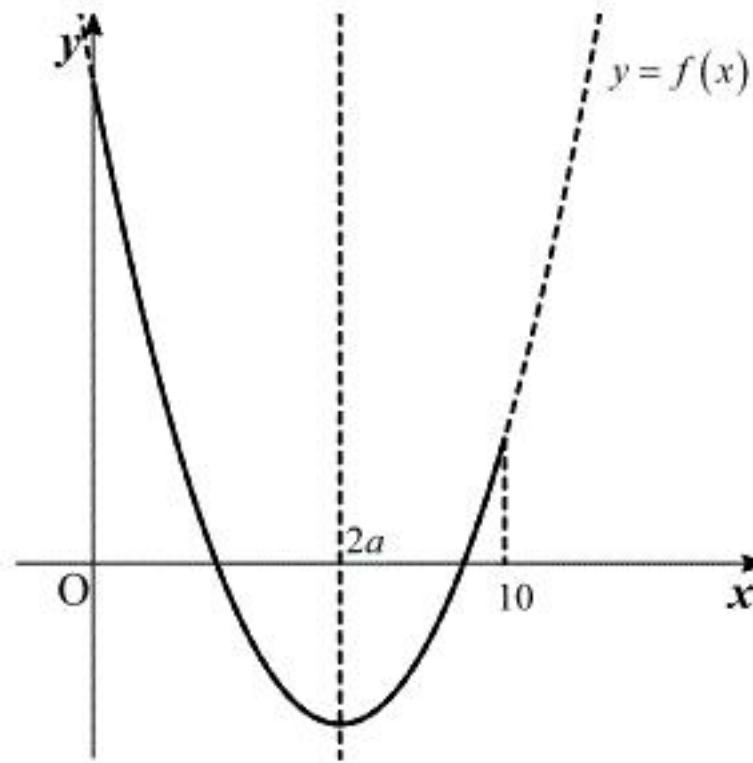
$$f(10)=10^2-4a\cdot 10+3a^2=3a^2-40a+100$$

であるから、条件は

$$\begin{aligned} 3a^2-40a+100 &= 100 \\ \Leftrightarrow a(3a-40) &= 0 \\ \therefore a &= 0 \quad (\because a<\frac{5}{2}) \end{aligned}$$

となる。

[2] $2a\geq 5$ のとき



このとき $a\geq\frac{5}{2}$ となる。いま、 $0\leq x\leq 10$ での $y=f(x)$ の最大値は

$$f(0)=3a^2$$

であるから、条件は

$$\begin{aligned} 3a^2 &= 100 \\ \therefore a &= \frac{10}{3}\sqrt{3} \quad (\because a\geq\frac{5}{2}) \end{aligned}$$

となる。

以上[1],[2]より、答えは

$$a=0, \frac{10}{3}\sqrt{3}$$

である。

(答) $a=0, \frac{10}{3}\sqrt{3}$

(3)

(i)

$$\begin{aligned}a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20} &= S_{20} - S_{10} \\&= \frac{1}{3}(20^3 - 10^3) - \frac{5}{2}(20^2 - 10^2) + \frac{1}{6}(20 - 10) \\&= 1585\end{aligned}$$

である。

(答) 1585

(ii)

$n = 2, 3, 4, \dots$ について

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\&= \frac{1}{3}\{n^3 - (n-1)^3\} - \frac{5}{2}\{n^2 - (n-1)^2\} + \frac{1}{6}\{n - (n-1)\} \\&= \frac{1}{3}(3n^2 - 3n + 1) - \frac{5}{2}(2n - 1) + \frac{1}{6} \\&= n^2 - 6n + 3\end{aligned}$$

となる。これに $n=1$ を代入した値は

$$a_1 = S_1 = -2$$

と一致するから、これらを合わせて

$$a_n = n^2 - 6n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

といえる。

(答) $a_n = n^2 - 6n + 3$

(iii)

$$\begin{aligned}a_n &> 100 \\&\Leftrightarrow n^2 - 6n + 3 > 100 \\&\Leftrightarrow n^2 - 6n - 97 > 0 \\&\therefore n > 3 + \sqrt{106} \quad (\because n \text{ は自然数})\end{aligned}$$

である。ここで、 $10 < \sqrt{106} < 11$ より

$$13 < 3 + \sqrt{106} < 14$$

であるから、条件を満たす最小の自然数は

$$n = 14$$

と分かる。

(答) $n = 14$

(4)

(i)

内分比より

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}\right) \\ &= \frac{2}{9}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OG} = \frac{2}{9}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PF} &= k\overrightarrow{PQ} + l\overrightarrow{PR} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP} &= k(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) + l(\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OF} &= (1-k-l)\overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{OQ} + l\overrightarrow{OR}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OF} = (1-k-l)\overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{OQ} + l\overrightarrow{OR}$$

(iii)

(i), (ii)より, 実数 k, l を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= (1-k-l)\overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{OQ} + l\overrightarrow{OR} \\ \therefore \overrightarrow{OF} &= \frac{1}{2}(1-k-l)\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}k\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}l\overrightarrow{OC} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表せる。また, 3点 A, F, G が同一直線状に存在することより, 実数 m を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= m\overrightarrow{AG} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} &= m(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA}) \\ \therefore \overrightarrow{OF} &= (1-m)\overrightarrow{OA} + \frac{2}{9}m\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}m\overrightarrow{OC} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

と表せる。4点 O, A, B, C が四面体の頂点であることよりベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は互いに一次独立となるから, ①と②の係数を比較することで

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \frac{1}{2}(1-k-l) = 1-m \\ \frac{2}{3}k = \frac{2}{9}m \\ \frac{3}{4}l = \frac{1}{4}m \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2m = k+l+1 \\ k = \frac{1}{3}m \\ l = \frac{1}{3}m \end{cases}\end{aligned}$$

が得られる。これらの式から k, l を消去すると

$$\begin{aligned}2m &= 1 + \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}m \\ \therefore m &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

となるから, ②に代入することで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= \left(1 - \frac{3}{4}\right)\overrightarrow{OA} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{16}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

と分かる。以上より, $\overrightarrow{OF} = r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$ の係数と比較すると

$$(r, s, t) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{16}\right)$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad (r, s, t) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{16}\right)$$

(5)

(i)

$$t = 2 + \sin \theta + \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow t - 2 = \sin \theta + \cos \theta$$

となる。この式の両辺を2乗することで、

$$(t - 2)^2 = (\sin \theta + \cos \theta)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{3}{2}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{3}{2}$$

(ii)

$$t = 2 + \sin \theta + \cos \theta = 2 + \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

と変形できる。 $\theta + \frac{\pi}{4}$ は全実数を取り得るから、 t のとり得る範囲は

$$2 - \sqrt{2} \leq t \leq 2 + \sqrt{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2 - \sqrt{2} \leq t \leq 2 + \sqrt{2}$$

(iii)

$$y = \frac{4(2 + \sin \theta + \cos \theta) - 2 + 2 \sin \theta \cos \theta}{2 + \sin \theta + \cos \theta}$$

$$= \frac{4t - 2 + 2\left(\frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{3}{2}\right)}{t}$$

$$= \frac{t^2 + 1}{t}$$

$$= t + \frac{1}{t}$$

となり、 $t > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の関係より

$$y \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}}$$

$$\therefore y \geq 2$$

が成立する。等号成立条件は

$$t = \frac{1}{t}$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 1$$

$$\therefore t = 1 (\because t > 0)$$

となり、 $t = 1$ は(ii)で求めた t の範囲に適する。よって y の最小値は2である。

$$(\text{答}) \quad 2$$

(6)

(i)

$$f'(x) = \frac{1}{\log x} \cdot (\log x)' = \frac{1}{x \log x}$$
$$g'(x) = 2m \log x \cdot (\log x)' = 2m \frac{\log x}{x}$$

であるから、求める条件は

$$f(e) = g(e) \quad \text{かつ} \quad f'(e) = g'(e)$$

$$\Leftrightarrow \log(\log e) = m(\log e)^2 + n \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{e \log e} = 2m \frac{\log e}{e}$$

$$\Leftrightarrow m + n = 0 \quad \text{かつ} \quad m = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (m, n) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

(ii)

改めて $f(x) = \log(\log x)$ と定義すると、 $f'(x) = \frac{1}{x \log x}$ である。

①

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} x \log x dx &= \int_e^{e^2} \left(\frac{x^2}{2} \right)' \cdot \log x dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \cdot \log x \right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x^2}{2} \cdot (\log x)' dx \\ &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \int_e^{e^2} \frac{x}{2} dx \\ &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_e^{e^2} \\ &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{4}e^2 \\ &= \frac{3}{4}e^4 - \frac{1}{4}e^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{4}e^4 - \frac{1}{4}e^2$$

②

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \frac{1}{x \log x} dx &= \int_e^{e^2} f'(x) dx \\ &= [f(x)]_e^{e^2} \\ &= [\log(\log x)]_e^{e^2} \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \log 2$$

③

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \frac{\log(\log x)}{x \log x} dx &= \int_e^{e^2} f(x) \cdot f'(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \{f(x)\}^2 \right]_e^{e^2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\{\log(\log x)\}^2 \right]_e^{e^2} \\ &= \frac{1}{2} (\log 2)^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} (\log 2)^2$$

(7)

この試行を3回繰り返すとき、カードの取り出し方は全部で $5^3 = 125$ 通りあり、それらは同様に確からしい。

(i)

$a_1 < a_2 < a_3$ を満たす a_1, a_2, a_3 の組は、5枚のカードから重複なく3枚を選び、それらを小さい順に出せばよいから、

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ 通り}$$

の10通り存在する。よって求める確率は

$$\frac{10}{125} = \frac{2}{25}$$

である。

(答) $\frac{2}{25}$

(ii)

$$(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1) = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ または } a_2 = a_3 \text{ または } a_3 = a_1$$

である。いま、余事象を考えると、 $a_1 \neq a_2$ かつ $a_2 \neq a_3$ かつ $a_3 \neq a_1$ となる場合を考えればよい。このようになる場合の数は、 a_1 の選び方が5通り、 a_2 の選び方が a_1 以外の4通り、 a_3 の選び方が a_1, a_2 以外の3通りであるから、

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ 通り}$$

である。よって、求める確率は

$$1 - \frac{60}{125} = \frac{13}{25}$$

である。

(答) $\frac{13}{25}$

(iii)

$$a_1 a_2 - a_2 a_3 + a_3 a_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1(a_2 + a_3) = a_2 a_3$$

である。

[1] $a_1 = 1$ のとき

条件は

$$a_2 + a_3 = a_2 a_3$$

$$\Leftrightarrow (a_2 - 1)(a_3 - 1) = 1$$

となる。 a_2, a_3 は自然数であり、 $a_2 - 1 \geq 0$ に注意すると、これを満たすのは

$$(a_2 - 1, a_3 - 1) = (1, 1)$$

$$\therefore (a_2, a_3) = (2, 2)$$

の1通りのみであると分かる。

[2] $a_1 = 2$ のとき

条件は

$$2(a_2 + a_3) = a_2 a_3$$

$$\Leftrightarrow (a_2 - 2)(a_3 - 2) = 4$$

となる。 $-1 \leq a_2 - 2 \leq 3$ かつ $-1 \leq a_3 - 2 \leq 3$ であることより、これを満たすのは

$$(a_2 - 2, a_3 - 2) = (2, 2)$$

$$\therefore (a_2, a_3) = (4, 4)$$

の1通りのみであると分かる。

[3] $a_1 \geq 3$ のとき

条件より

$$3(a_2 + a_3) \leq a_1(a_2 + a_3) = a_2 a_3$$

$$\therefore (a_2 - 3)(a_3 - 3) \geq 9$$

が得られるが、 $-2 \leq a_2 - 3 \leq 2$ かつ $-2 \leq a_3 - 3 \leq 2$ の範囲でこれを満たす (a_2, a_3) の組は存在しない。

以上[1]～[3]より、 $a_1 a_2 - a_2 a_3 + a_3 a_1 = 0$ を満たす a_1, a_2, a_3 の組は $1 + 1 = 2$ 通りのみ存在するから、求める確率は

$$\frac{2}{125}$$

である。

(答) $\frac{2}{125}$

(8)

(i)

$$\begin{aligned}a_1 + b_1 i &= 1 + \sqrt{3}i \\&= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \\&= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)\end{aligned}$$

である。

(答) $2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

(ii)

$a_n + b_n i = (1 + \sqrt{3}i)^n$ ・ ・ ・ ①が成り立つことを数学的帰納法によって示す。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = 1, b_1 = \sqrt{3}$ より $a_1 + b_1 i = (1 + \sqrt{3}i)^1$ となり、①が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、①が成り立つとすると、 $n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}a_{k+1} + b_{k+1} i &= (a_k - \sqrt{3}b_k) + (\sqrt{3}a_k + b_k) i \\&= (a_k + b_k i) + \sqrt{3}(a_k + b_k i) i \\&= (1 + \sqrt{3}i)(a_k + b_k i) \\&= (1 + \sqrt{3}i)^{k+1}\end{aligned}$$

となり、①が成立する。

以上[1][2]より、すべての自然数 n に対して①が成立する。

(証明終)

(iii)

(ii)より、

$$\begin{aligned}a_n + b_n i &= (1 + \sqrt{3}i)^n \\&= \left\{ 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \right\}^n \\&= 2^n \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^n\end{aligned}$$

となる。ここで、ド・モアブルの定理より、

$$\begin{aligned}a_n + b_n i &= 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right) \\&= 2^n \cos \frac{n\pi}{3} + 2^n i \sin \frac{n\pi}{3}\end{aligned}$$

となる。実部と虚部を比較して、

$$a_n = 2^n \cos \frac{n\pi}{3}, b_n = 2^n \sin \frac{n\pi}{3}$$

である。

(答) $a_n = 2^n \cos \frac{n\pi}{3}, b_n = 2^n \sin \frac{n\pi}{3}$

(iv)

$$\begin{aligned}x_n + y_n i &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) (1 + \sqrt{3}i)^n \\&= \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right) \left\{ 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right\}^n \\&= 2^n \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right) \left(\cos \frac{n}{3} \pi + i \sin \frac{n}{3} \pi \right) \quad (\because \text{ド・モアブルの定理}) \\&= 2^n \left(\cos \frac{4n+9}{12} \pi + i \sin \frac{4n+9}{12} \pi \right)\end{aligned}$$

より、実部と虚部を比較して、 $(x_n, y_n) = \left(2^n \cos \frac{4n+9}{12} \pi, 2^n \sin \frac{4n+9}{12} \pi \right)$ と分かる。よって

$$\frac{y_n}{x_n} = \tan \frac{4n+9}{12} \pi$$

となる。ここで、 $k=1, 2, 3, \dots$ を用いて

$$\frac{y_n}{x_n} = \begin{cases} \tan \frac{4 \cdot 3k+9}{12} = \tan \left(k\pi + \frac{3}{4} \pi \right) = \tan \frac{3}{4} \pi = -1 & (n=3k \text{ のとき}) \\ \tan \frac{4(3k-2)+9}{12} = \tan \left(k\pi + \frac{1}{12} \pi \right) = \tan \frac{1}{12} \pi > 0 & (n=3k-2 \text{ のとき}) \\ \tan \frac{4(3k-1)+9}{12} = \tan \left(k\pi + \frac{5}{12} \pi \right) = \tan \frac{5}{12} \pi > 0 & (n=3k-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表せるから、 $\frac{y_n}{x_n}$ の最小値は -1 である。

(答) -1

(9)

(i)

$S(n) > 0$ であるから、 $n \geq 100$ のときは

$$n + S(n) > 100 + 0 = 100$$

となり、 $n + S(n) = 100$ を満たさない。よって題意を満たす n は 2 桁以下の自然数であり、

$$n = 10a + b \quad (a, b \text{ は共に } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数})$$

と表せる。このとき

$$\begin{aligned} n + S(n) &= 100 \\ \Leftrightarrow (10a + b) + (a + b) &= 100 \\ \Leftrightarrow 11a + 2b &= 100 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{100 - 11a}{2} \end{aligned}$$

が成立するから、

$$\begin{aligned} 0 \leq b \leq 9 \\ \Leftrightarrow 0 \leq \frac{100 - 11a}{2} \leq 9 \\ \Leftrightarrow \frac{82}{11} \leq a \leq \frac{100}{11} \\ \therefore a = 8, 9 \quad (\because a \text{ は整数}) \end{aligned}$$

が必要である。 $b = \frac{100 - 11a}{2}$ に代入して計算すると、 $a = 8$ のときは $b = 6$ となり、十分である。

$a = 9$ のときは $b = \frac{1}{2}$ となり、 b が整数という条件に反するため不適当である。以上より、題意を満たす (a, b) は $(8, 6)$ のみであると分かり、求める n は

$$n = 10 \cdot 8 + 6 = 86$$

となる。

(答) $n = 86$

(ii)

n が m 桁 (m は自然数) の数であるとする、

$$S(n) \leq 9m$$

が成立する。よって $S(n) = 100$ を満たすとき

$$\begin{aligned} 100 &\leq 9m \\ \Leftrightarrow m &\geq \frac{100}{9} \\ \therefore m &\geq 12 \quad (\because m \text{ は自然数}) \end{aligned}$$

が満たされる。よって $S(n) = 100$ を満たす最小の n は 12 桁以上の自然数である。ここで、

$$100 = 9 \times 11 + 1$$

であることに注目すると、 $S(n) = 100$ を満たす 12 桁の自然数の 1 つとして

$$n = 199999999999$$

が挙げられる。この数の最高位の数字が 1 であること、また他の位の数字が全て 9 であることを考えると、 $S(n) = 100$ を満たすこれよりも小さい 12 桁の数は存在しないから、求める最小の n は $n = 199999999999$ である。

(答) $n = 199999999999$

iii)

$$n \leq 27S(n) + 2019 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす最大の n を求める。ここで、 n が l 桁 (l は自然数) の自然数であるとする

$$10^{l-1} \leq n, S(n) \leq 9l$$

が満たされるから、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} 10^{l-1} &\leq n \leq 27S(n) + 2019 \leq 27 \cdot 9l + 2019 \\ \therefore 10^{l-1} &\leq 243l + 2019 \end{aligned}$$

が成立する。この不等式を満たす最大の l は $l = 4$ であるから、求める最大の n は 4 桁の自然数であると言える。以上より、

$$n = 1000p + 100q + 10r + s \quad (p, q, r, s \text{ はいずれも } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数})$$

とおける。このとき、 $\textcircled{1}$ は

$$\begin{aligned} 1000p + 100q + 10r + s &\leq 27(p + q + r + s) + 2019 \\ \Leftrightarrow 973p &\leq -73q + 17r + 26s + 2019 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と書き換えられる。以下、 $\textcircled{2}$ を満たし、かつ $n = 1000p + 100q + 10r + s$ が最大となるような p, q, r, s の組を求める。ここで、 $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} 973p &\leq -73q + 17r + 26s + 2019 \leq -73 \cdot 0 + 17 \cdot 9 + 26 \cdot 9 + 2019 \\ \therefore 973p &\leq 2406 \\ \therefore p &\leq 2 \quad (\because p \text{ は自然数}) \end{aligned}$$

が成り立つから、 $\textcircled{2}$ のもとで $1000p + 100q + 10r + s$ が最大になるのは

$$p = 2$$

のときである。またこのとき、 $\textcircled{2}$ は

$$\begin{aligned} 973 \cdot 2 &\leq -73q + 17r + 26s + 2019 \\ \Leftrightarrow 73q &\leq 17r + 26s + 73 \end{aligned}$$

と書き換えられる。この不等式において

$$\begin{aligned} 73q &\leq 17 \cdot 9 + 26 \cdot 9 + 73 \\ \therefore 73q &\leq 460 \\ \therefore q &\leq 6 \end{aligned}$$

が成立するから、 $\textcircled{2}$ のもとで $1000p + 100q + 10r + s$ が最大になるのは

$$p = 2 \text{ かつ } q = 6$$

のときであると分かる。またこのとき、 $\textcircled{2}$ は

$$\begin{aligned} 73 \cdot 6 &\leq 17r + 26s + 73 \\ \therefore 17r + 26s &\geq 365 \end{aligned}$$

となる。これを満たし、かつ $1000p + 100q + 10r + s$ が最大になるのは

$$p = 2 \text{ かつ } q = 6 \text{ かつ } r = s = 9$$

のときである。以上より、求める最大の n は

$$n = 1000 \cdot 2 + 100 \cdot 6 + 10 \cdot 9 + 9 = 2699$$

であると分かる。

(答) $n = 2699$