

数 学

注 意

1. 問題は全部で8ページである。
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること。
3. 解答はすべて解答用紙に記入すること。
4. 解答用紙は必ず提出のこと。「問題(冊子に限る)は提出する必要はない。」

マーク・シート記入上の注意

1. 解答用紙(その1)はマーク・シートになっている。**HB**の黒鉛筆を用いて記入すること。
2. 解答用紙にあらかじめプリントされた受験番号・氏名を確認すること。
3. 解答用紙をよごしたり折り曲げたりしないこと。

I 以下の問題については解答用紙(その1)を使用すること。

- (1) 2次関数 $y = x^2 + (a+1)x + a+1$ のグラフが x 軸と交わらないとき、このグラフと y 軸の交点を $(0, b)$ とすると、 b の存在する範囲は

$\boxed{\text{ア}} < b < \boxed{\text{イ}}$ である。

- (2) 1 から 10 までの番号の札がある。この中から 3 枚取り出すとき、次のような取り出し方は何通りあるか。

1. 偶数を少なくとも 1 枚含む: $\boxed{\text{アイウ}}$ 通り

2. 最大の番号が 7: $\boxed{\text{エオ}}$ 通り

- (3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、関数 $y = \sin \theta + \cos \theta$ の最大値は $\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ 、最小値は $\boxed{\text{イウ}}$ である。

- (4) 不等式 $\log_2(2x - 1) < -1$ の解は、

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} < x < \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

Ⅱ 以下の問題については解答用紙(その1)を使用すること.

x の2次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の解を x_1, x_2 とする.

(1) $a_1 = x_1 + x_2 = \boxed{\text{ア}}$ である.

(2) $a_2 = x_1^2 + x_2^2 = \boxed{\text{イ}}$ である.

(3) 一般に $a_n = x_1^n + x_2^n$ とおくとき, $a_4 - 2a_3 = \boxed{\text{ウ}}$ である.

(4) $a_{20} - 2a_{19} - a_{18} = \boxed{\text{エ}}$

Ⅲ

以下の問題については解答用紙(その1)を使用すること.

2つの曲線 $y = x^3 + 3x^2 + 3x$ と $y = 3x^2 + 6x - 2$ があり, これらの曲線は接していることがわかっている.

(1) 2曲線が接している点の座標は(,)である.

(2) 2曲線が交差している点の座標は(,)である.

(3) 2曲線で囲まれる部分の面積は $\frac{\text{キク}}{\text{ケ}}$ である.

IV 以下の問題については解答用紙(その2)を使用すること。

(1) $f(x) = x^2$ とするとき、点 $x = c$ における接線の方程式 $y = g(x)$ を求めよ。

(2) すべての x に対して $f(x) \geq g(x)$ であることを示せ。

(3) 任意の実数 $a_1, \dots, a_n$ に対して $c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ における接線を考えることにより、

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = f(c)$$

を示せ。

(4) $f(x) = 2^x$ についても、任意の点 $x = c$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とすると $g(x) = m(x - c) + f(c)$ と表されるが、不等式 $f(x) \geq g(x)$ を満たすことが知られている。このことを用いて

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i) \geq f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right)$$

すなわち $c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ とするとき、

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{a_i} \geq 2^c$$

となることを示せ。

(5) $b_i > 0$ に対して $a_i = \log_2 b_i$ とおくことにより、前問の結果から算術平均と幾何平均の関係

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \geq \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}$$

が得られることを示せ。