

数 学

注 意

1. 問題は全部で14ページである.
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること. (ただし, マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている.)
3. 解答はすべて解答用紙に記入すること.
4. 解答用紙は必ず提出のこと. [問題(冊子に限る)は提出する必要はない.]

マーク・シート記入上の注意については, この問題冊子の裏面に記載されているので試験開始までに確認すること. ただし, 冊子は開かないこと.

マーク・シート記入上の注意

1. 解答用紙(その1)はマーク・シートになっている。HBの黒鉛筆を用いて記入すること。
2. 解答用紙にあらかじめプリントされた受験番号を確認すること。
3. 解答用紙をよごしたり折り曲げたりしないこと。

問題の アイ , キ などの には、ある整数が入る。これらを次の方法で解答欄に解答せよ。解答には、HBの鉛筆を使用すること。

- (1) ア、イ、ウ、…のひとつひとは、それぞれ0から9までの数字、または、 $-$ 、 $+$ 、 $*$ のいずれかひとつに対応する。それらをア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークする。

マークは、○を塗りつぶすことによっておこなう。訂正するときは、消しゴムで完全に消すこと。×をつけても、消したことになる。

(例) アイ に -7 と答えたいとき

ア	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
イ	①	②	③	④	⑤	⑥	●	⑧	⑨	⑩

(例) ウエ に38と答えたいとき

ウ	①	②	③	④	●	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
エ	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	●	⑨	*

- (2) 解答欄が余るときは、余った欄(後の方を余らす)に $*$ をマークする。

(例) オカキ に4と答えたいとき

オ	①	②	③	●	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	*
カ	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	●
キ	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	●

- (3) 解答欄が不足するときは、最後の欄に $*$ を付加する(この場合、最後の欄には2つのマークが入ることになる)。

(例) クケ に -365 と答えたいとき

ク	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	*
ケ	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	●

- (4) 解答欄に適合するものがないときは、その欄に $*$ をマークする。

(例) コサ に対して問題が

$$x^2 + 1 < 0 \text{ ならば } x \geq \text{ コサ }$$

のとき

コ	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	●
サ	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	●

- (5) 以上により、どの欄にもかならずマークが入ることになる。記入のない欄は、解答放棄とみなされる。

- (6) 分数形で解答するときは既約分数とし、符号は分子につけること。

- (7) 平方根はできるだけ開く。【例】 $\sqrt{8}$ は $2\sqrt{2}$ とする。

I 以下の問題については解答用紙(その1)を使用すること。

(1) 不等式 $\log_2 x < \log_x 2$ の解は,

$$0 < x < \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad \boxed{\text{ウ}} < x < \boxed{\text{エ}}$$

である。

(2) 不等式 $|x^2 - 2x - 15| \leq x + 3$ の解は,

$$x = \boxed{\text{アイ}}, \quad \boxed{\text{ウ}} \leq x \leq \boxed{\text{エ}}$$

である。

(3) 不等式 $1 - 2 \cos x > 0$ の解は,

$$\boxed{\text{アイ}}^\circ < x < \boxed{\text{ウエオ}}^\circ$$

である。ただし、 $0^\circ \leq x < 360^\circ$ とする。

(4) 関数 $y = x^3 + ax^2 - 2(b-2)x$ が極値をもたないような自然数の組

(a, b) を a の値の小さい方から並べると,

$(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ と $(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}})$ になる。

Ⅱ 以下の問題については解答用紙(その1)を使用すること。

2 次方程式 $x^2 + 2(m - 1)x + (6m + 21) = 0$ について以下の問いに答えよ。ただし m は実数とする。

- (1) 2 次方程式の 2 つの解の比が $1 : 3$ となるような m の値は

$$m = \boxed{\text{ア}} \pm \boxed{\text{イ}} \sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$$

である。

- (2) 2 次方程式の解が虚数解をもつような m の値の範囲は

$$\boxed{\text{アイ}} < m < \boxed{\text{ウエ}}$$

である。

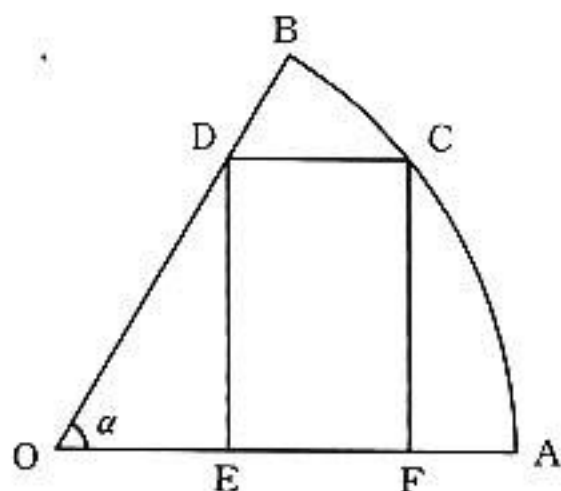
- (3) 2 次方程式の解が重解となるような m の値のうち小さい方を m_1 、大きい方を m_2 として 2 次方程式の解を求めよ。

$$m = m_1 \text{ のとき } x = \boxed{\text{ア}}$$

$$m = m_2 \text{ のとき } x = \boxed{\text{イウ}}$$

Ⅲ 以下の問題については解答用紙(その1)を使用すること。

図のように、半径1，中心角 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) の扇形 OAB の弧 AB 上の点 C を考える。線分 CD と OA を平行として、長方形 CDEF を作る。



注意：(2)，(3)，(4)の選択肢は設問の後に示す。なお，適当な選択肢がない場合には*をマークすること。

(1) $\tan \frac{\alpha}{2} = t$ とおくと， $\sin \alpha = \frac{\boxed{\text{ア}} t}{\boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}} t^2}$ である。

(2) 角 $\text{AOC} = \beta$ とおくと， $\overline{\text{OE}} = \overline{\text{DE}} \frac{1}{\tan \boxed{\text{ア}}} = \frac{\sin \boxed{\text{イ}} \cos \boxed{\text{ウ}}}{\sin \boxed{\text{エ}}}$

(3) $\overline{\text{EF}} = \frac{\sin \boxed{\text{ア}}}{\sin \boxed{\text{イ}}}$

(4) 長方形 CDEF の面積は， $\frac{1}{2 \sin \boxed{\text{ア}}} (\cos \boxed{\text{イ}} - \cos \boxed{\text{ウ}})$

(5) 点 C が弧 AB 上を動くとき，長方形 CDEF の面積の最大値は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} t$ である。

- 選択肢：(a) α (b) β (c) $\frac{\alpha}{2}$ (d) $\frac{\beta}{2}$
 (e) $\alpha + \beta$ (f) $\alpha - \beta$ (g) $\alpha + 2\beta$ (h) $\alpha - 2\beta$

IV 以下の問題については解答用紙(その2)を使用すること.

四方を壁で囲まれた一辺の長さが5 m の正方形の空地があり, その4隅を左回りにA B C Dと名づける. テニスボールが隅Aから出発し, 壁で反射しながら直進を続け, どこかの隅に到着すればそこで止まるものとする. このとき以下の問いに答えよ, ただしボールの大きさは無視し, また平面運動のみを考えるものとする.

- (1) 少なくとも1度反射してから隅Cに到着する経路のうち, 1番短いものについて, その距離を求めよ.
- (2) 少なくとも1度反射してから隅Dに到着する経路のうち, 2番目に短いものについて, その距離を求めよ.
- (3) すべての辺の壁で反射する経路のうち, 1番短いものについて, その距離を求めよ.
- (4) ボールは隅Aに戻ってこないことを証明せよ.

以下の問題は、B方式の受験生のみ解答すること。

V 以下の問題については解答用紙(その1)を使用すること。

なお、必要があれば $x^n (n \geq 1)$ の不定積分が C を任意の定数として $\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ で与えられることを用いていい。

(1) 2次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が $f(1) = 4$, $f'(1) = 5$,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{10}{3} \text{ を満たすならば}$$

$a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$, $c = \boxed{\text{ウ}}$ となる。

(2) $h(x)$ は2次関数で

$$\int_0^1 \{h(x)\}^2 dx = 8, \quad \int_0^1 xh(x) dx = -1$$

とする。いま t の関数を $g(t) = \int_0^1 \{h(x) - tx\}^2 dx$ と定めると、

$g(t)$ は $t = \boxed{\text{アイ}}$ のときに、その最小値 $g(t) = \boxed{\text{ウ}}$ をとる。

(3) 放物線 $y = x^2$ 上の2点 P , Q はそれぞれ第1象限, 第2象限を動き、原点 O は通らないとする。直線 PQ と放物線で囲まれる部分の面積 S_1 と、三角形

OPQ の面積 S_2 の比 $\frac{S_1}{S_2}$ の最小値は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

VI 以下の問題については解答用紙(その1)を使用すること.

2 次方程式

$$(1+i)x^2 + \{(1+i)p - (1+3i)\}x - (9+7i)p = 0$$

の1つの解が実数となるように実数 p の値を定め, そのときの方程式の解を求めたい. ただし $i = \sqrt{-1}$ である.

(1) p の値のうち小さい方を p_1 , 大きい方を p_2 とする.

$$p_1 = \boxed{\text{ア}}, p_2 = \boxed{\text{イ}}$$

(2) p_1 のときの解は

$$x = \boxed{\text{ア}}, x = \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}} i$$

(3) p_2 のときの解は

$$x = \boxed{\text{ア}}, x = \boxed{\text{イウ}} + \boxed{\text{エ}} i$$

VII 以下の問題については解答用紙(その3)を使用すること.

$x > 0$ の範囲で定義された関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ を考える.

以下では $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$ が任意の整数 n (ただし $n \neq 0$ とする) に対して成立すること, 特に $\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$ となることを利用していい.

(1) 任意の $m > 0$ に対して $y = f(x)$ の $x = m$ における接線の方程式 $y = g(x)$ を求め, $f(x) \geq g(x)$ が成立すること, また等号は $x = m$ のときのみであることを示せ.

(2) 任意の $x_1, x_2, \dots, x_n$ に対して $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ とおくと

$$\sum_{i=1}^n (x_i - m) = 0$$

となることを示せ.

(3) 前問の m に対して $f(x_i)$ と $g(x_i)$ とを比較することにより, 任意の正の実数 $x_1, \dots, x_n$ について次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{-1} \right)^{-1} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

ただし等号成立は $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ のときに限られる.