

数 学

注 意

1. 問題は全部で5題あり、冊子は計算用の余白も合わせて10ページである。
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること。(ただし、マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている。)
3. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に記入すること。指定の欄以外に記入されたものは採点の対象としない。
4. 計算用紙としては、問題冊子の余白を使用すること。
5. マーク・シート記入については、解答用紙(その1)の「解答上の注意」にしたがうこと。
6. 解答用紙(その2)、(その3)については、論述無しで結果だけ記しても、正解とはみなさない。
7. 解答用紙はすべて必ず提出すること。問題冊子は持ち帰ってよい。

1 解答を解答用紙(その1)の **1** 欄に記入せよ。

赤玉2個、青玉2個、白玉2個を一直線上に並べるものとする。

(1) 異なる並べ方は全部で **ア** **イ** 通りある。

(2) (1)の並べ方のうち、赤玉2個が必ず隣り合う場合は **ウ** **エ** 通りある。

(3) (1)の並べ方のうち、赤青白の順に3個隣り合う玉の列が必ず現れる場合は **オ** **カ** 通りある。

三角形 $\triangle ABC$ において、 $AB = 5$ 、 $AC = 6$ であり、 $\theta = \angle BAC$ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすものとする。このときさらに辺 BC の長さ a は正整数で、 $\triangle ABC$ の面積 S は有理数であるものとして、 a および S を以下の手順で求めよう。

(1) $\cos \theta$ を a を用いて表せば、

$$\cos \theta = \frac{\boxed{\text{キ}} \boxed{\text{ク}} - a^2}{\boxed{\text{ケ}} \boxed{\text{コ}}} \dots\dots\dots (*)$$

である。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ だから $0 < \cos \theta < 1$ であるが、 $(*)$ の右辺が正でかつ1より真に小となるための正整数 a は、 $\boxed{\text{サ}} \leq a \leq \boxed{\text{シ}}$ を満たす $\boxed{\text{ス}}$ 通り以外にはあり得ない。

(2) $(*)$ を用いて

$$\sin \theta = \frac{1}{\boxed{\text{セ}} \boxed{\text{ソ}}} \sqrt{(a^2 - \boxed{\text{タ}}^2)(\boxed{\text{チ}} \boxed{\text{ツ}}^2 - a^2)}$$

であることがわかる。一方 $S = \boxed{\text{テ}} \boxed{\text{ト}} \sin \theta$ であり、 S は有理数であるから、 $\sin \theta$ も有理数となる。

(3) (1)で求めた範囲の a について、 $\sin \theta$ が有理数となる場合をさがすことによ

り、 $a = \boxed{\text{ナ}}$ であることがわかる。またこのとき $\sin \theta = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ であるから $S = \boxed{\text{ネ}} \boxed{\text{ノ}}$ であり、実は S は整数となる。

3 解答用紙(その2)の **3** 欄に記述せよ。

$$F(x) = \int_0^x (\sin x - \sin t) \cos^2 t dt \text{ とおく。}$$

(1) $F(x)$ を求めよ。

(2) x が $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲を動くとき、 $F(x)$ の最大値を求めよ。

4

解答用紙(その2)の

4

欄に記述せよ。

点 P は xyz 空間内を動き、その時刻 t における座標は $(6, 3 \cos t, 1 + 3 \sin t)$ であるものとする。また定点 $A(0, 0, 1)$ と点 P とを結ぶ直線 AP が xy 平面と交わる点を Q とする。

- (1) 点 Q は xy 平面上のどのような曲線を描くか。その方程式と概形を示せ。
- (2) 点 Q の y 座標が 1 となる時刻における Q の動く速さを求めよ。

5 解答用紙(その3)の **5** 欄に記述せよ。

a は $0 < a < 1$ を満たす実数の定数とする。複素数 z に対して複素数 w を

$$w = 1 + aiz \quad (i \text{ は虚数単位})$$

によって対応させる。複素数平面上で原点 O , 1 , i の3点を頂点とする三角形を T_1 とし, z が T_1 上を動くときに w の描く三角形を T_2 , z が T_2 上を動くときに w の描く三角形を T_3 として, 以下同様に三角形 T_4 , T_5 , $\dots$ を定義する。

- (1) T_1 と T_2 の和集合を図示し, その面積を求めよ。
- (2) 4番目の三角形 T_4 が, 点 1 と点 i とを結ぶ直線と共有点を持たないための, a に関する条件を求めよ。
- (3) a が (2) で求めた条件を満たすとき, 三角形 T_1 , T_2 , $\dots$, T_n の和集合として与えられる図形を S_n とする。極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。