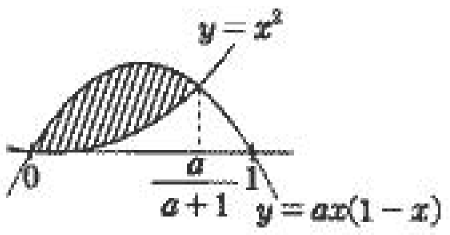
$\boxed{1}$

① 16　　② 133　　③ 867

$\boxed{2}$



$y=x^2$ と $y=ax(1-x)$ の交点は

$(a+1)x^2-ax=0$ より

$x\{(a+1)x-a\}=0$

$x=0,\ \frac{a}{a+1}$

上図より

$$\int_0^{\frac{a}{a+1}}\{ax(1-x)-x^2\}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 ax(1-x)dx$$

$$\therefore\ \frac{1}{6}(a+1)\left(\frac{a}{a+1}-0\right)^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}a(1-0)^3$$

$$\therefore\ \frac{2a^3}{(a+1)^2}=a$$

$a>0$　$\therefore$ $2a^2=(a+1)^2$

$\therefore$ $a^2-2a-1=0$

$a>0$　$\therefore$ $a=1+\sqrt{2}$

$\boxed{3}$

(1) $y=\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\theta+a\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$=\frac{1}{2}\{(a-1)\cos 2\theta+\sin 2\theta\}+\frac{a+1}{2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(a-1)^2+1}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{a+1}{2}$

ただし $\sin\alpha=\frac{a-1}{\sqrt{(a-1)^2+1}}$

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{(a-1)^2+1}}$　…(＊)

$(0^\circ<\alpha<90^\circ)$

$\alpha\leqq 2\theta+\alpha<\alpha+720^\circ$ より

$-1\leqq\sin(2\theta+\alpha)\leqq 1$

よって y の最大値は

$\frac{\sqrt{(a-1)^2+1}}{2}+\frac{a+1}{2}$　…(答)

(2) $\frac{\sqrt{(a-1)^2+1}+a+1}{2}=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ $\sqrt{(a-1)^2+1}=2-a+\sqrt{2}$　$(1<a<2+\sqrt{2})$

$\therefore$ $(a-1)^2+1=(2-a+\sqrt{2})^2$

$\therefore$ $a^2-2a+2=a^2-2(2+\sqrt{2})a+(2+\sqrt{2})^2$

$\therefore$ $(2+2\sqrt{2})a=4+4\sqrt{2}$

$\therefore$ $a=2$　($1<a<2+\sqrt{2}$ をみたす)

(＊)より　$\alpha=45^\circ$

$2\theta+45^\circ=90^\circ$、$450^\circ$ で y は最大

$\therefore$ $\theta=22.5^\circ$、202.5°

(答) $a=2$

$\theta=22.5^\circ$、202.5°