

1

(1) ア 1

イ 4

ウ $\frac{25}{4}$

(2) エ 5

オ $\frac{3}{5}$

カ $-\frac{7\sqrt{2}}{2}$

真数条件は,

$$x - a > 0 \text{ かつ } x^2 + ax + a^2 > 0$$

$$\iff x > a \text{ かつ } \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(i) $a = 0$ のとき, $\textcircled{1} \iff x > 0$ となり, 与式は,

$$\log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = 2 \log_2 x = \log_2 x^2$$

により,

$$\log_2 x^2 = \log_2 \frac{1}{2} \cdot x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{2} x^2$$

すると, $x = 0$ となり真数条件に反する。

(ii) $a \neq 0$ のとき, $\textcircled{1} \iff x > a$ となり,

与式は, (i) と同様にして,

$$\log_2 (x - a)^2 = \log_2 \frac{1}{2} (x^2 + ax + a^2)$$

$$2(x - a)^2 = x^2 + ax + a^2$$

$$x^2 - 5ax + a^2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} a$$

このうち真数条件 $x > a$ をみたすものは,

$$a > 0 \text{ のとき, } x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} a$$

$$a < 0 \text{ のとき, } x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} a$$

(i)(ii) より,

$$\begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} a & (a > 0) \\ \text{解なし} & (a = 0) \\ x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} a & (a < 0) \end{cases} \quad \cdots \text{ (答)}$$

(1) (i) $1 \leq a \leq \frac{5}{3}$ のとき,

$$\begin{aligned}
 F(a) &= \int_0^1 (a-x)^2 dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}(a-x)^3 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}(a-1)^3 \\
 &= a^2 - a + \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

(ii) $0 \leq a \leq 1$ のとき,

$$\begin{aligned}
 F(a) &= \int_0^a (a-x)^2 dx + \int_a^1 4(x-a)^2 dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}(a-x)^3 \right]_0^a + \left[\frac{4}{3}(x-a)^3 \right]_a^1 \\
 &= \frac{1}{3}a^3 + \frac{4}{3}(1-a)^3 \\
 &= -a^3 + 4a^2 - 4a + \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

(i)(ii) より,

$$F(a) = \begin{cases} a^2 - a + \frac{1}{3} & \left(1 \leq a \leq \frac{5}{3}\right) \\ -a^3 + 4a^2 - 4a + \frac{4}{3} & (0 \leq a \leq 1) \end{cases} \quad \dots \text{ (答)}$$

(2) (i) のとき, $F(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}$ により単調増加で,

(ii) のとき, $F'(a) = -3a^2 + 8a - 4 = -(3a-2)(a-2)$

より, $F(a)$ の増減表は右のようになる。

a	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$F'(a)$		-	0	+	
$F(a)$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	$\frac{4}{27}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

$$F\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{13}{9} > \frac{4}{3} = F(0)$$

より,

$$\begin{cases} \text{最大値: } F\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{13}{9} \\ \text{最小値: } F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27} \end{cases} \quad \dots \text{ (答)}$$