

$$\square / (1) \quad 14 + 6\sqrt{5} = 14 + 2\sqrt{9 \times 5} = (\sqrt{9} + \sqrt{5})^2 = (3 + \sqrt{5})^2 \text{ である.}$$

$$\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = 3 + \sqrt{5} = 5 + (\sqrt{5} - 2) \quad ; \quad 0 < \sqrt{5} - 2 < 1$$

$$\Rightarrow \underline{a=5, \quad b=\sqrt{5}-2}$$

$$\because x, \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2 \text{ より, } b + \frac{1}{b} = 2\sqrt{5} \text{ である.}$$

$$b^2 + \frac{1}{b^2} = (b + \frac{1}{b})^2 - 2 = (2\sqrt{5})^2 - 2 = \underline{18}$$

$$b^3 + \frac{1}{b^3} = (b + \frac{1}{b})^3 - 3(b + \frac{1}{b}) = (2\sqrt{5})^3 - 6\sqrt{5} = \underline{34\sqrt{5}}$$

$$(2) \quad x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3), \quad x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3),$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x+2)(x+3) \quad ; \quad \text{である.}$$

$$f(-1) = -(-1) - 10 = -9, \quad f(-2) = -2(-2) - 13 = -9,$$

$$f(-3) = -(-3) - 10 = -7 \quad ; \quad \text{を用いる.}$$

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

と調べると:

$$\begin{cases} a-b+c=-9 \\ 4a-2b+c=-9 \\ 9a-3b+c=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b=0 \\ 5a-b=2 \\ c=-a+b-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=-7 \end{cases}$$

$$\therefore \text{求める余りは } \underline{x^2 + 3x - 7}$$

$$(3) \quad \frac{1234}{123} = 10 + \frac{4}{123} = 10 + \frac{1}{\frac{123}{4}} = 10 + \frac{1}{30 + \frac{3}{4}} = 10 + \frac{1}{30 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

$$(4) \quad 3 > a \text{ 或 } a \geq 2 \text{ 或 } a \text{ が素数と作れる.}$$

$$2(a+x+u) = 66 \Leftrightarrow a+x+u = 33$$

これと $3 > a$ 或 $a \geq 2$ 或 a が素数と作れる;

$$u=12, \quad a=10, \quad x=11 \Rightarrow \underline{a=10, \quad x=11, \quad u=12}$$

$$(5) \quad f(5) + f(3) = \sqrt{5} + \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}, \quad f(\sqrt{5}) - f(\sqrt{3}) = \sqrt{5} - \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \text{ である.}$$

$$\text{よって } = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{5} = \underline{f(5)}$$

- [2] (1) 3回で終了するとは、3回とも満塁の目、あるいは1・2回目で1点以外の目で3回目に1点目を出るときである；

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{27+25}{216} = \frac{13}{54}$$

- (2) 4回目に1点目を出て終了するとは、1~3回の出目で「3回とも満塁で終わらず、1点目でもない」ときに起きるので；

$$\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{3}{6}\right)^3\right\} \times \frac{1}{6} = \frac{125-27}{6^4} = \frac{98}{6^4} = \frac{49}{648}$$

- (3) 4回目に満塁を出て終了するとは、1~3回の出目に1点目もなく、1~3回のうち2回に満塁の目を出る」ときに起きるので、

$$3C_2 \left(\frac{3}{6}\right)^2 \cdot \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

- (4) 得点で2ポイントになるのは、5回まで投げたときに、5回のうち2回に満塁の目を出て、あとの3回は3回とも3点以下の目を出るときである、

$$5C_2 \left(\frac{3}{6}\right)^2 \left(\frac{2}{6}\right)^3 = 10 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{27} = \frac{5}{54}$$

- (5) 4ポイント以下になるのは、得点の最大値で5ポイントである、

$$5 \text{ ポイント} \iff 1+1+3; 0+1+1+3, 1+0+1+3, 1+1+0+3; \\ 0+0+1+1+3, \dots, 1+1+0+0+3 \text{ (4C}_2 \text{通りある)}$$

なので、この余事象確率を1で求めると；

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{6} - 3 \times \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} - 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ = 1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{24} - \frac{1}{36} = 1 - \frac{4}{36} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

13

(1) $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ と極形式に表すと、ド・モアヴルの定理を

用いると;

$$\alpha^3 = \cos 720^\circ + i \sin 720^\circ = \underline{1} \quad (\alpha^6 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1)$$

$$\alpha^{15} = (\alpha^6)^2 \times \alpha = 1^2 \times \alpha = \alpha = \underline{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}}$$

$$(2) \quad \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \times 27} = 3 \times \sqrt[3]{2}, \quad \frac{3}{2} \sqrt[3]{4} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{-4}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

$$\therefore \text{よって}, \quad \sqrt[3]{54} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{-4}} = \left(3 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \sqrt[3]{2} = 4 \sqrt[3]{2} \text{ となる.}$$

$$\therefore \text{よって}, \quad \log_2 4 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{\frac{7}{3}} = \frac{7}{3} \log_2 2 = \underline{\frac{7}{3}}$$

$$(3) \quad (\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2) = \left(\log_2 3 + \frac{\log_2 9}{\log_2 4}\right) \left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{\log_2 9}\right) \\ = \left(\log_2 3 + \frac{2 \log_2 3}{2}\right) \left(\frac{2}{\log_2 3} + \frac{1}{2 \log_2 3}\right) = 2 \log_2 3 \times \frac{5}{2 \log_2 3} = \underline{5}$$

$$(4) \quad \log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 7 \times \log_7 8 \\ = \log_2 3 \times \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 7}{\log_2 5} \times \frac{\log_2 8}{\log_2 7} = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = \underline{3}$$

$$(5) \quad X = \log_2 a \text{ とおく. } \log_2 2a = \log_2 2 + \log_2 a = 1 + X, \quad \log_2 (4a^2) \\ = \log_2 4 + \log_2 a^2 = 2 \log_2 2 + 2 \log_2 a = 2 + 2X \text{ となる. よって } X \text{ を用いて,}$$

$$2(1+X)^2 + (2+2X) + 2X + 2 \\ = 2X^2 + 8X + 6 = 2(X+2)^2 - 2$$

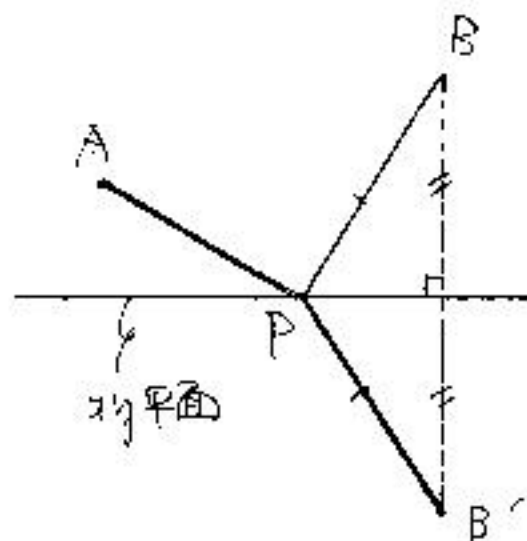
$$\therefore \text{よって}, \quad X = \log_2 a = -2 \iff \underline{a = 2^{-2} = \frac{1}{4}} \text{ となる.}$$

4

(1) $B(-1, 2, 3)$ が xy 平面に反対称点を B' とすれば、 $B'(-1, 2, -3)$ であり、 $PB = PB'$ である。 $AP + PB$ かわりに $AP + PB'$ の最小値も考えたい。

これは、 A, P, B' が一直線上にあるときに最小となり、その最小値は線分 AB' の長さである。したがって、求める最小値は、

$$\begin{aligned} & \sqrt{(-1-1)^2 + (2-1)^2 + (-3-1)^2} \\ &= \sqrt{4+1+16} = \underline{\underline{\sqrt{21}}} \end{aligned}$$



(2) $\vec{BA} = (2, -1, -2)$, $\vec{BC} = (x+1, -3, 1)$ である。

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| |\vec{BC}| \cos \angle ABC \iff \cos \theta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|}$$

これより、

$$\cos \theta = \frac{2(x+1) + 3 - 2}{3\sqrt{(x+1)^2 + 10}} = \underline{\underline{\frac{2x+3}{3\sqrt{x^2+2x+11}}}}$$

$$(3) S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{BA}|^2 |\vec{BC}|^2 - (\vec{BA} \cdot \vec{BC})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{9(x^2+2x+11) - (2x+3)^2} = \frac{\sqrt{5x^2+6x+90}}{2}$$

$$\text{つまり, } 5x^2+6x+90 = 5\left(x+\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{9}{5} + 90 \geq \frac{461}{5} = \left(\frac{21}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\text{である. } S(x) \text{ は } x = -\frac{3}{5} \text{ のときに最小値 } \frac{1}{2} \times \frac{21}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{21\sqrt{5}}{10}}} \text{ となる.}$$

$$\boxed{5} \quad (1) \quad \tan(4\alpha - 45^\circ) = \frac{\tan 4\alpha - \tan 45^\circ}{1 + \tan 4\alpha \tan 45^\circ} = \frac{\tan 4\alpha - 1}{\tan 4\alpha + 1} \quad \text{とあり,}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2/5}{1 - 1/25} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \tan 4\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{5/6}{1 - 25/144} = \frac{120}{119} \quad \text{とあり,}$$

$$\tan(4\alpha - 45^\circ) = \frac{120 - 119}{120 + 119} = \frac{1}{239}$$

$$(2) \quad \cos \beta = \frac{1}{2} - \sin \alpha, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \alpha \quad \alpha \text{ と } \beta \text{ は } 0^\circ \text{ から } 360^\circ \text{ の範囲内}$$

$$1 = \left(\frac{1}{2} - \sin \alpha\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \alpha\right)^2 = 2 - \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin(\alpha + 60^\circ) = 1 \Leftrightarrow \sin(\alpha + 60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$60^\circ \leq \alpha + 60^\circ < 420^\circ \quad \text{とあり}$$

$$\alpha + 60^\circ = 150^\circ \text{ または } 390^\circ \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ \text{ または } 330^\circ$$

$$\begin{cases} \alpha = 90^\circ \text{ だと } \beta \text{ について, } \cos \beta = -\frac{1}{2}, \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = 120^\circ \\ \alpha = 330^\circ \text{ だと } \beta \text{ について, } \cos \beta = 1, \sin \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0^\circ \end{cases}$$

よって, $(\alpha, \beta) = (90^\circ, 120^\circ), (330^\circ, 0^\circ)$ とあり

(3) 連立方程式を

$$\begin{aligned} x^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) &= (x+2)(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= (x+2)\{\cos(-2\theta) + i \sin(-2\theta)\} \end{aligned}$$

とすると, $\cos \theta + i \sin \theta = \alpha$ とおけるから, $x^2 \times \alpha^3 = (x+2) \times \alpha^{-2}$ とおける。

$$\text{よって, } x^2 \times \alpha^5 = x+2 \text{ とおける。}$$

$$\underline{x^2(\cos 5\theta + i \sin 5\theta) = x+2}$$

と導かれる。

右辺は2以上の整数 $(x \geq 0)$ とあり,

$$\cos 5\theta > 0, \sin 5\theta = 0; \quad 0^\circ < 5\theta < 900^\circ$$

$$\Leftrightarrow 5\theta = 360^\circ \text{ または } 720^\circ$$

$$\Leftrightarrow \theta = 72^\circ \text{ または } 144^\circ$$

$$\text{よって } x^2 = x+2 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \text{ とあり, } x \geq 0 \text{ より, } x=2$$

$$\text{と決まる。よって, } (x, \theta) = (2, 72^\circ) \text{ または } (2, 144^\circ) \text{ とあり。}$$

$$\begin{aligned}
 [6] \quad (1) \quad & a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 - (a_1 c_1 + a_2 c_2)(b_1 c_1 + b_2 c_2) \\
 &= a_1 b_1 c_1 (1 - c_1) + a_2 b_2 c_2 (1 - c_2) - a_1 b_2 c_1 c_2 - a_2 b_1 c_1 c_2 \\
 &= a_1 b_1 c_1 c_2 + a_2 b_2 c_1 c_2 - a_1 b_2 c_1 c_2 - a_2 b_1 c_1 c_2 \\
 &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1) c_1 c_2 \\
 &= (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) c_1 c_2 \geq 0 \quad (\because a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2, c_1, c_2 > 0)
 \end{aligned}$$

等号成立は $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ かつ $a_1 \neq 0$ のとき

$$(2) \quad A = \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2}{c_1 + c_2}, \quad B = \frac{b_1 c_1 + b_2 c_2}{c_1 + c_2} \quad \text{と 仮定}$$

$$\begin{aligned}
 & (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)(b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3) \\
 &= \{A(c_1 + c_2) + a_3 c_3\} \{B(c_1 + c_2) + b_3 c_3\} \quad (*)
 \end{aligned}$$

よって, $A = \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2}{c_1 + c_2} \leq a_3, \quad B = \frac{b_1 c_1 + b_2 c_2}{c_1 + c_2} \leq b_3$ であることは明らかで
 かつ, $(c_1 + c_2) + c_3 = 1$ であるから, (1) のより次を得る。

$$(*) \leq AB(c_1 + c_2) + a_3 b_3 c_3$$

$$\text{すなわち, } A = a_1 \times \frac{c_1}{c_1 + c_2} + a_2 \times \frac{c_2}{c_1 + c_2}, \quad B = b_1 \times \frac{c_1}{c_1 + c_2} + b_2 \times \frac{c_2}{c_1 + c_2}$$

であるから (1) を用いられる;

$$AB \leq a_1 b_1 \times \frac{c_1}{c_1 + c_2} + a_2 b_2 \times \frac{c_2}{c_1 + c_2} \quad \text{よって}$$

$$\begin{aligned}
 (*) &\leq \frac{a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2}{c_1 + c_2} \times (c_1 + c_2) + a_3 b_3 c_3 \\
 &= a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + a_3 b_3 c_3
 \end{aligned}$$

とされる。

$$(3) \quad A = \frac{a_1 c_1 + \dots + a_n c_n}{c_1 + \dots + c_n}, \quad B = \frac{b_1 c_1 + \dots + b_n c_n}{c_1 + \dots + c_n} \quad \text{と 仮定}$$

$$(a_1 c_1 + \dots + a_{n+1} c_{n+1})(b_1 c_1 + \dots + b_{n+1} c_{n+1}) \quad \text{と 仮定}$$

$$\{A(c_1 + \dots + c_n) + a_{n+1} c_{n+1}\} \{B(c_1 + \dots + c_n) + b_{n+1} c_{n+1}\}$$

$$\leq AB(c_1 + \dots + c_n) + a_{n+1} b_{n+1} c_{n+1} \quad \dots \dots \dots (*)$$

($\because A \leq a_{n+1}, B \leq b_{n+1}, c_1 + \dots + c_{n+1} = 1$ より, (1) を利用)

よって, AB の両辺は 帰納法の仮定より

$$\begin{aligned}
 AB &\leq a_1 b_1 \times \frac{c_1}{c_1 + \dots + c_n} + \dots + a_n b_n \times \frac{c_n}{c_1 + \dots + c_n} \\
 &= \frac{a_1 b_1 c_1 + \dots + a_n b_n c_n}{c_1 + \dots + c_n}
 \end{aligned}$$

とされるから, (*) は すなわち,

$$\leq (a_1 b_1 c_1 + \dots + a_n b_n c_n) + a_{n+1} b_{n+1} c_{n+1}$$

すなわち, 与式が 成立 である。

$$(4) \quad c_1 = c_2 = \dots = c_n = \frac{1}{n} \quad \text{と (2) (3) を 用いる}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n} + \dots + \frac{a_n}{n} \right) \left(\frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n} + \dots + \frac{b_n}{n} \right) \\
 & \leq \frac{a_1 b_1}{n} + \frac{a_2 b_2}{n} + \dots + \frac{a_n b_n}{n}
 \end{aligned}$$

とされ, 2 両辺に n^2 をかけると

$$\begin{aligned}
 & (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \\
 & \leq n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)
 \end{aligned}$$

とされる。