$\boxed{1}$

(1) $a=\sqrt{98}+\sqrt{49}=7\sqrt{2}+7$, $b=\sqrt{98}-\sqrt{49}=7\sqrt{2}-7$ であり、

$$\log_7 a+\log_7 b=\log_7 ab=\log_7(98-49)=\log_7 49$$
$$=\log_7 7^2=2\log_7 7=\underline{2}$$

$$a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab=(14\sqrt{2})^2-49$$
$$=2\times 14^2-49=8\times 7^2-7^2=7^3$$
$$\Longrightarrow \log_7(a^2+ab+b^2)=\log_7 7^3=3\log_7 7=\underline{3}$$

(2) (イ) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\underline{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\underline{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

(ロ) $AB=k$ とおけば $CA=\sqrt{2}k$ であって、正弦定理により、

$$\frac{CA}{\sin\angle B}=\frac{AB}{\sin\angle C}\iff\frac{\sqrt{2}k}{\sin(\angle C+15^\circ)}=\frac{k}{\sin\angle C}$$

$$\iff \sqrt{2}\sin\angle C=\sin(\angle C+15^\circ)$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\sin\angle C+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cos\angle C$$
$$\iff \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\sin C=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cos\angle C$$
$$\iff \tan\angle C=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$0^\circ<C<165^\circ$ なので、

$$\underline{\angle C=30^\circ}$$

$\boxed{2}$

$$f(x) = \int_0^1 (x - at) f(t)\,dt = \left(\int_0^1 f(t)\,dt \right) x - a \int_0^1 t f(t)\,dt$$

で、$A = \int_0^1 f(t)\,dt$, $B = \int_0^1 t f(t)\,dt$ とおけば $f(x) = Ax - aB$ となる。

$f(0) = 1$ から $f(x) = Ax + 1$ $(-aB = 1)$ なので、

$$A = \int_0^1 (At + 1)\,dt = \frac{A}{2} + 1 \iff A = 2$$

このとき、

$$B = \int_0^1 t(2t + 1)\,dt = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

なので、$a = -\frac{1}{B} = -\frac{6}{7}$ とわかる。

求める a と $f(x)$ は、$a = -\frac{6}{7}$, $f(x) = 2x + 1$ である。

$\boxed{3}$ (1) 円 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2 \iff x^2+y^2-2ax-2by=0$ と $y=x+1$ から y を消去してできる x の2次方程式：

$$x^2+(x+1)^2-2ax-2b(x+1)$$

$$=2x^2-2(a+b-1)x+1-2b=0$$

が $x=k$ を重解にもつ，すなわち，$(x-k)^2=x^2-2kx+k^2=0$ と同値であるから；

$$a+b-1=2k,\ 1-2b=2k^2$$

$$\iff \underline{a=k^2+2k+\frac{1}{2}},\ \underline{b=\frac{1}{2}-k^2}$$

(2) (a,b) が第2象限 $\iff a<0,\ b>0$ なので；

$$\begin{cases} k^2+2k+\frac{1}{2}<0 \iff -1-\frac{\sqrt{2}}{2}<k<-1+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2}-k^2>0 \iff -\frac{\sqrt{2}}{2}<k<\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\iff \underline{-\frac{\sqrt{2}}{2}<k<-1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$