

①

$$\frac{\text{ア}}{\text{イ}} \quad \frac{1}{6}$$

$$\frac{\text{ウ}}{\text{エオ}} \quad \frac{2}{27}$$

$$\frac{\text{カ}}{\text{キ}} \quad \frac{1}{3}$$

$$\frac{\text{ク}}{\text{ケコ}} \quad \frac{1}{27}$$

$$\frac{\text{サ}}{\text{シス}} \quad \frac{1}{81}$$

②

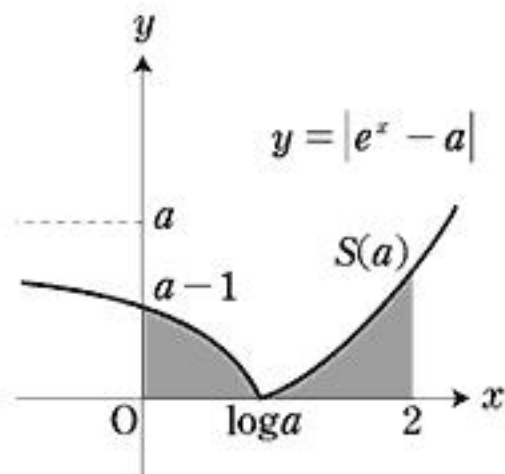
セソ                      48

タチ                    12

ツテ                    36

3

- (1)  $y = |e^x - a|$  のグラフの概形は右図のようになり,  $S(a)$  は塗部分の面積だから,



$$\begin{aligned} S(a) &= -\int_0^{\log a} (e^x - a) dx + \int_{\log a}^2 (e^x - a) dx \\ &= -[e^x - ax]_0^{\log a} + [e^x - ax]_{\log a}^2 \\ &= 2a \log a - 4a + e^2 + 1 \quad \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad S'(a) &= 2 \log a + 2 - 4 \\ &= 2(\log a - 1) \end{aligned}$$

より, 増減表は右のようになり,

| $a$     | 1 | ... | $e$ | ... | $e^2$ |
|---------|---|-----|-----|-----|-------|
| $S'(a)$ |   | -   | 0   | +   |       |
| $S(a)$  |   | ↘   |     | ↗   |       |

$$\begin{cases} S(1) = e^2 - 3 \\ S(e) = e^2 - 2e + 1 = (e - 1)^2 \\ S(e^2) = e^2 + 1 > S(1) \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{cases} \text{最大値: } S(e^2) = e^2 + 1 \\ \text{最小値: } S(e) = (e - 1)^2 \end{cases} \quad \cdots (\text{答})$$

- (1) 点 P は  $l$  上の点だから、 $P(2, 3, z)$  と表せる。

直線 AB と直線 CP の交点を Q とすると、実数  $t$  を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{CP} \\ &= (2t, 3t, 1+t(z-1))\end{aligned}$$

と表せる。また、直線 AB は

$$\begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

と表せるから、点 Q について、

$$\begin{cases} 2t+3t=1 \\ 1+t(z-1)=0 \end{cases} \quad \therefore t=\frac{1}{5}, \quad z=-4$$

よって、 $P(2, 3, -4)$  ... (答)

- (2)  $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{CP} = (2, 3, -5)$  より、

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CP}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{38}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{19}} = \frac{\sqrt{19}}{38} \quad \dots \text{ (答)}\end{aligned}$$

- (3)  $\triangle ABC$  は 1 辺の長さが  $\sqrt{2}$  の正三角形であ

り、また、

$$\overrightarrow{BP} = (2, 2, -4)$$

より、

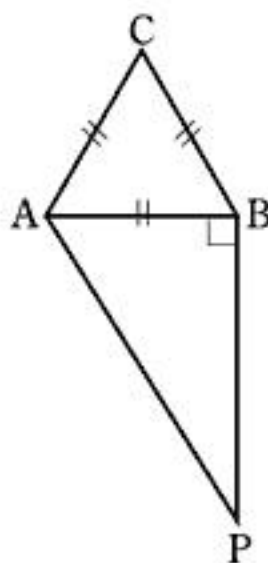
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

となるから、 $\triangle ABP$  は  $\angle B = 90^\circ$  の直角三角形

である。よって、 $BP = 2\sqrt{6}$  より、

四角形 ACBP =  $\triangle ABC + \triangle ABP$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{2} \quad \dots \text{ (答)}\end{aligned}$$



(1) (i)  $P(x, y)$ とすると,

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

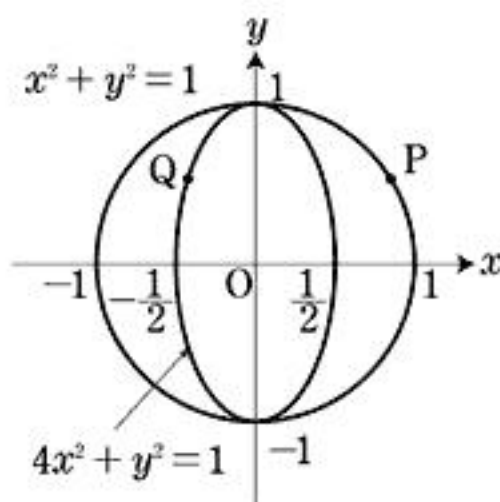
となり, これは円である。

(ii)  $Q(x, y)$ とすると,

$$(2x)^2 + y^2 = \cos^2 3t + \sin^2 3t = 1$$

$$\therefore 4x^2 + y^2 = 1$$

これは楕円である。



(2) 点  $R$  は直線  $OP$  上にあり, さらに円  $x^2 + y^2 = 1$  の内側にあるから,  $R(r \cos t, r \sin t)$  ( $-1 \leq r \leq 1$ ) と表せる。すると, 線分  $RP$  の長さは,

$$RP = 1 - r$$

で与えられる。ここで,  $OP \perp QR$  より,  $R \neq Q$  のとき,

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \cos t - \frac{1}{2} \cos 3t \\ r \sin t - \sin 3t \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore r &= \frac{1}{2} \cos 3t \cos t + \sin 3t \sin t \\ &= \frac{1}{2} (4 \cos^3 t - 3 \cos t) \cos t + (3 \sin t - 4 \sin^3 t) \sin t \\ &= -2 \cos^4 t + \frac{7}{2} \cos^2 t - 1 \end{aligned}$$

この式は  $R = Q$  のときも成り立つから,

$$RP = 2 \cos^4 t - \frac{7}{2} \cos^2 t + 2 \quad \dots \text{ (答)}$$

$$(3) \quad RP = 2 \left( \cos^2 t - \frac{7}{8} \right)^2 + \frac{15}{32} \quad (0 \leq \cos^2 t \leq 1) \text{ より,}$$

$RP$  は  $\cos^2 t = 0$  のとき最大値 2 をとり,  $\cos^2 t = \frac{7}{8}$  のとき

最小値  $\frac{15}{32}$  をとる。  $\dots$  (答)