

数 学

注 意

1. 問題は全部で12ページである.
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること. (ただし, マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている.)
3. 解答はすべて解答用紙に記入すること.
4. 解答用紙は必ず提出のこと. [問題は提出する必要はない.]
5. 問題Ⅳ, Ⅴは, B方式の受験生のみ解答すること.

マーク・シート記入上の注意については, この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること. ただし, 冊子は開かないこと.

[I] 以下の問題については 解答用紙 (その 1) を使用すること.

(1) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$ の整数部分を a , 小数部分を b とする. このとき, a の値は [ア],

$b^2 + \frac{1}{b^2}$ の値は [イウ], $b^3 + \frac{1}{b^3}$ の値は [エオ] $\sqrt{[カ]}$ である.

(2) 整式 $f(x)$ を $x^2 + 4x + 3$ で割ると $-x - 10$ 余り, $x^2 + 5x + 6$ で割ると $-2x - 13$ 余る.

$f(x)$ を $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ で割ったときの余りは, [ア] x^2 + [イ] x + [ウエ] である.

(3) $\frac{1234}{123} = [アイ] + \frac{1}{[ウエ] + \frac{1}{1 + \frac{1}{[オ]}}}$ である. ただし, [] 内には正の整数が入る.

(4) 次の 3 つの方程式 $s + t = 21$, $t + u = 23$, $u + s = 22$ を同時に満たす解は

$s = [アイ]$, $t = [ウエ]$, $u = [オカ]$ である.

(5) $f(x) = \sqrt{x}$ とするとき,

$$\frac{1}{f(5)+f(3)} + \frac{1}{f(5)-f(3)} = f([ア]).$$

Ⅱ 以下の問題については 解答用紙(その1)を使用すること。

1個のさいころを投げて、1の目が出たら3ポイントの得点、また偶数の目が出たら1ポイントの得点を得る。このさいころを連続して投げ、1の目が出たら、あるいは偶数の目が3回出たら、そこでさいころ投げを終了する。ただしさいころは最高5回投げるものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) さいころ投げが3回で終了する確率は $\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

(2) 4回目に1が出て終了する確率は $\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエオ}}}$ である。

(3) 4回目に偶数が出て終了する確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(4) 得点が2ポイントになる確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

(5) 得点が4ポイント以下になる確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

Ⅲ 以下の問題については 解答用紙 (その 1) を使用すること。

(1) $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする. $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ とするとき,

$$\alpha^{12} = \boxed{\text{ア}}, \quad \alpha^{55} = \frac{\boxed{\text{イ}} + \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}i}{2}$$

である.

(2)

$$\log_2 \left[\sqrt[3]{54} + \frac{3}{2}\sqrt[6]{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{-4}} \right] = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

(3)

$$(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2) = \boxed{\text{ア}}$$

(4)

$$\log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 7 \times \log_7 8 = \boxed{\text{ア}}$$

(5)

$2(\log_2 2x)^2 + \log_2(4x^2) + 2\log_2 x + 2$ は, $x = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{ウエ}}$ を取る.

Ⅳ 以下の問題については 解答用紙 (その 2) を使用すること.

座標空間上に点 $A(1, 1, 1)$, 点 $B(-1, 2, 3)$ がある.

- (1) 2 点 A, B と, xy 平面上の動点 P に対し, $AP + PB$ の最小値を求めよ.
- (2) 2 点 A, B と点 $C(t, -1, 4)$ について, $\angle ABC = \theta$ として, $\cos \theta$ の値を t で表せ.
- (3) $\triangle ABC$ の面積 $S(t)$ の最小値を求めよ.

この問題は、B方式の受験生のみ解答すること。

Ⅴ 以下の問題については 解答用紙 (その1) を使用すること。

(1) $\tan \alpha = \frac{1}{5}$ とするとき

$$\tan(4\alpha - 45^\circ) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウエ}}}$$

である。

(2) 連立方程式

$$\begin{cases} \sin \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2} \\ \cos \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

において、 $0^\circ \leq \alpha, \beta < 360^\circ$ とする。この連立方程式から β を消去すると、 α に関する方程式

$$\boxed{\text{ア}} \sin \alpha + \sqrt{\boxed{\text{イ}}} \cos \alpha = 1$$

が得られる。これを解くことによって、連立方程式の解は、 α の小さい順に

$$(\alpha, \beta) = (\boxed{\text{ウエ}}^\circ, \boxed{\text{オカキ}}^\circ), (\alpha, \beta) = (\boxed{\text{クケコ}}^\circ, \boxed{\text{サ}}^\circ)$$

となる。

(3) 連立方程式

$$\begin{cases} x^2 \cos 3\theta = (x+2) \cos 2\theta \\ x^2 \sin 3\theta = -(x+2) \sin 2\theta \end{cases}$$

において、 $x \geq 0$, $0^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。

$i = \sqrt{-1}$ を虚数単位とするとき、この連立方程式から

$$x^2(\cos \boxed{\text{ア}} \theta + i \sin \boxed{\text{イ}} \theta) = x + \boxed{\text{ウ}}$$

という関係が導かれる。これにより連立方程式の解は、 θ の小さい順に、次のようになる。

$$(x, \theta) = (\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オカ}}^\circ), (x, \theta) = (\boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{クケコ}}^\circ)$$

この問題は、B方式の受験生のみ解答すること。

Ⅵ 以下の問題については 解答用紙 (その3) を使用すること。

- (1) $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$, $c_1 + c_2 = 1$ ($c_1, c_2 > 0$) のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また等号が成り立つのは、どのようなときか。

$$(a_1c_1 + a_2c_2)(b_1c_1 + b_2c_2) \leq a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2$$

- (2) $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, $b_1 \leq b_2 \leq b_3$, $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ ($c_1, c_2, c_3 > 0$) のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \leq a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_3$$

- (3) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 1$ ($c_1, c_2, \dots, c_n > 0$) のとき、数学的帰納法を用いて、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$(a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n)(b_1c_1 + b_2c_2 + \cdots + b_nc_n) \leq a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \cdots + a_nb_nc_n$$

- (4) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ のとき、(3) の不等式を利用して、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leq n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)$$