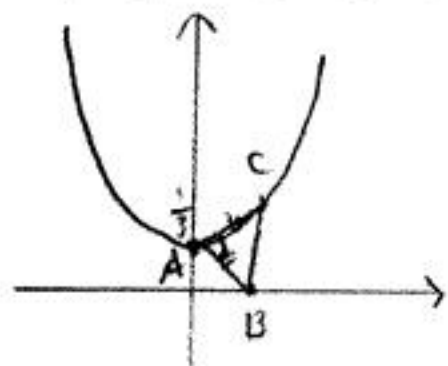


11

- (1) Aの座標は $(0, \frac{1}{3})$ Cの座標を $(a, 3a^2 + \frac{1}{3})$ とすると、



ACの傾きは $3a$ より、ABは、 $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{1}{3}$ となる。

よって、Bの座標は $(a, 0)$ と表せる。

ABとACは等距離なので、 $\frac{1}{3} = 3a^2$

$\Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{3}$ として、Bのx座標 a は $a > 0$ より

$$a = \frac{1}{3} \quad \dots \left(\frac{7}{12} \right)$$

$$\text{又Cの座標は } \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \quad \dots \left(\frac{7}{12}, \frac{17}{12} \right)$$

- (2) 放物線とBC, x軸より挟んで囲まれた部分の面積がS, OABを△Hは

$$\int_0^a (3x^2 + \frac{1}{3}) dx - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \left[x^3 + \frac{1}{3}x \right]_0^a - \frac{1}{18} = a^3 + \frac{1}{3}a - \frac{1}{18}$$

$$= \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{18}$$

$$= \frac{5}{54} \quad \dots \left(\frac{13}{171} \right)$$

②

ABを通る直線上の点は、

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \text{と表せる (t: 実数)}$$

よってQの座標を $\begin{pmatrix} 3+3t \\ 1+6t \\ 2+6t \end{pmatrix}$ と表すことができる。

$$\vec{PQ} \text{ と } \vec{OA} \text{ が等しいとき, } \vec{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$P \text{ の座標は, } P(3t, 6t, 6t) \text{ と表せる。}$$

Pが、Oを中心とする半径3の球面上にあるためには、

$$\sqrt{(3t)^2 + (6t)^2 + (6t)^2} = 3 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{3}$$

$$P \text{ の座標正より, } t = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって } P \text{ の座標は } \underline{(1, 2, 2) \dots (I, II, III)}$$

$$Q \text{ の座標は } \underline{(4, 3, 4) \dots (IV, V, VI)}$$

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

OAとOPの面積は、

$$\frac{1}{2} \sqrt{(1^2 + 2^2 + 2^2)(3^2 + 1^2 + 2^2) - (\vec{OA} \cdot \vec{OP})^2} \times 2$$

$$= \underline{3\sqrt{5} - 7\sqrt{4}}$$

13

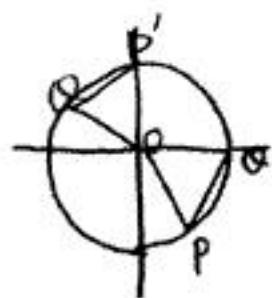
(i)の条件より、 P と原点との距離は1より小であるから、よって

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}} < 1 \Leftrightarrow b^2 < a^2+1$$

(i)と(ii)より、 OPQ は1辺1の正三角形なので、
 P と原点との距離は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ より

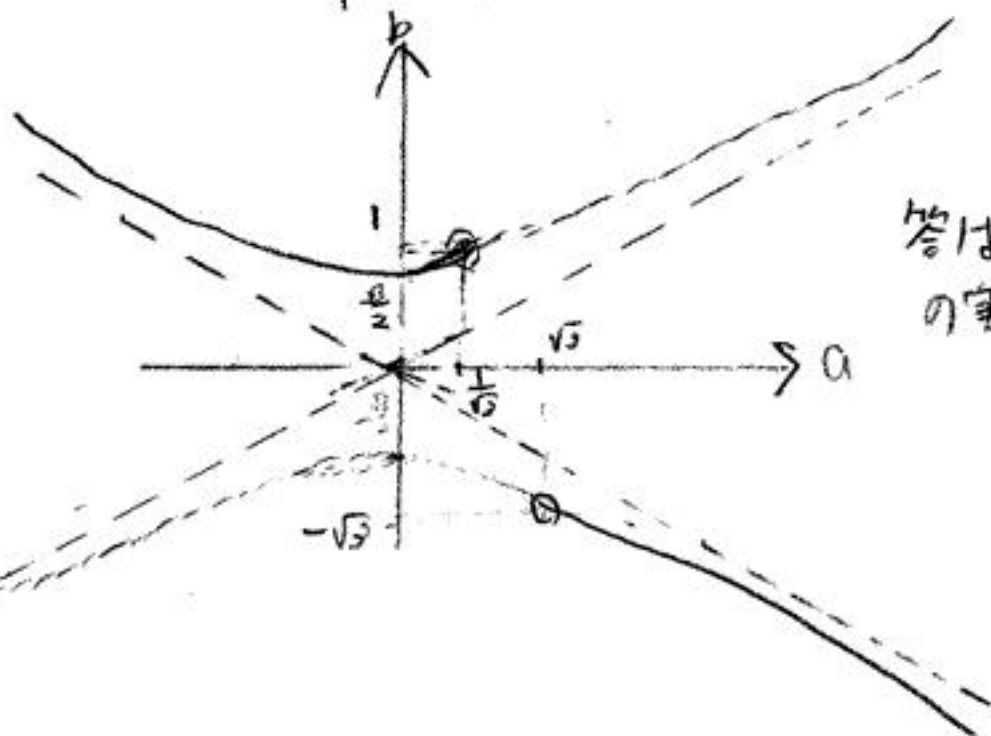
$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 4b^2 = 3a^2+3$$

(iii)より、正三角形 PQO は、図のような正三角形をなす
 ので、 PQ は $y = ax+b$ であるので、



a と b は

$\left\{ \begin{array}{l} a > \sqrt{3} \text{ かつ } b < 0 \\ a < \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ かつ } b > 0 \end{array} \right.$ が必要。よって、



答は左図
 の実線部分

4

$$(1) y = \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x$$

両辺を x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = 2 \sin x \cos x - \sqrt{2} \cos x$$

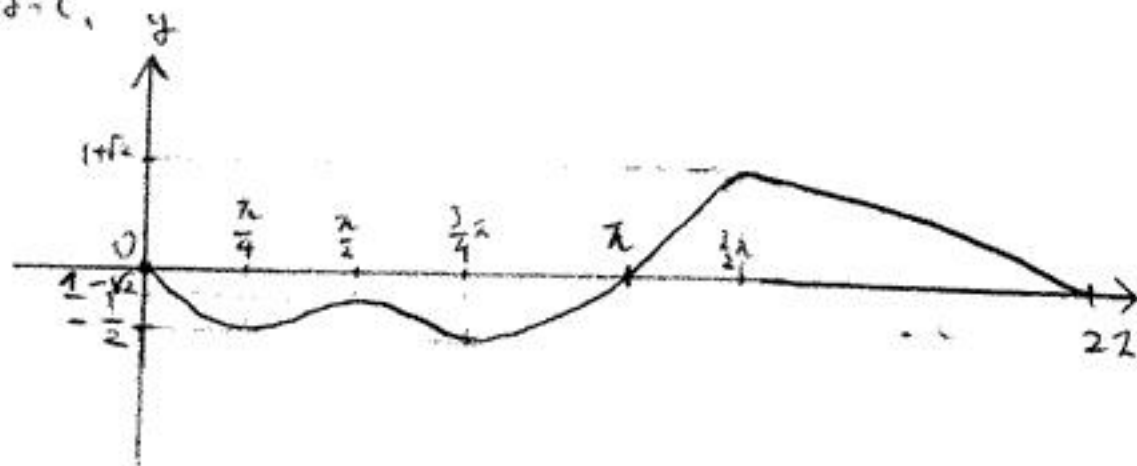
$$= \sqrt{2} \cos x (\sqrt{2} \sin x - 1)$$

∴ 増減表は、

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$\frac{dy}{dx}$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	
y	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$1-\sqrt{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$1+\sqrt{2}$	↘	0

と表す。

よって、



(2) (1)より、

$$S = \int_0^{\pi} -\sin^2 x + \sqrt{2} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x - \sqrt{2}\cos x \right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \sqrt{2}\cos x \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\pi + 2\sqrt{2} + \frac{1}{2}\pi + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

よって $4\sqrt{2}$

5

(1) p での $y = \log x$ の代価は、 $\frac{1}{a}$ である。

$$L: y = -a(x-a) + \log a = -ax + a^2 + \log a$$

$$\text{答 } y = -ax + a^2 + \log a$$

R の x 座標は、 $a + a \cdot a^k = a(1+a^k)$ より

$$\text{答 } (a(1+a^k), \log a - a^{k+2})$$

(2) a が $a > 0$ の範囲で動く時に、 $\log a - a^{k+2}$ が最大値を持つには、 $\log a - a^{k+2}$ を a で微分して、 $\frac{1}{a}(1 - (k+2)a^{k+1})$ が正か否かに変換点がある。それは、 $k+2 > 0$ であるから、

$$\text{答 } k > -2$$

又、このとき最大値は、 $a^{k+2} = \frac{1}{k+2}$ のときであるので、

$$M = \log a - a^{k+2} = \frac{1}{k+2} \log \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{k+2} \left(\log \frac{1}{k+2} - 1 \right)$$

$$\text{答 } M = \frac{1}{k+2} \left(\log \frac{1}{k+2} - 1 \right)$$