

1

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
5	2	2	5	4	5	4	2	5	2

2

サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
1	7	0	1	1	0	2	7

3

(1) 与えられた条件より,

$$|\vec{a}|^2 = 1$$

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1$$

$$4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1$$

を得る. 従って, これを解いて, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2}, |\vec{b}| = \sqrt{3}$ を得る. 求める角度を θ とすると, これは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角だから,

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる. よって, $\theta = \frac{5\pi}{6} \dots$ (答) である.

(2) 求める多角形の面積が, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形 (図 (別ページ参照) の塗り潰し部分) の面積の何倍になっているかを考えると, 右下の三角形 ACE の面積は平行四辺形の 1 倍であり, 右上の三角形 CDF の面積は平行四辺形の半分であるから, 多角形の面積は平行四辺形の面積の $5/2$ 倍である. 一方で平行四辺形の面積は,

$$|\vec{a}||\vec{b}| \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる. 従って, 求める面積は, $\frac{5\sqrt{3}}{4} \dots$ (答) である.

(1) 立方体の対角線の長さは $\sqrt{3}$ であるから, $A\left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ と, $G\left(0, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ がわかる. 立方体の yz 平面での断面を考えると図 (別ページ参照) のようになる. ここで, C から z 軸に下した垂線の足を I とすると, 三角形 GCI と三角形 GAC は相似であり, $AC = \sqrt{2}, GC = 1$ であるから, $CI : CG = \sqrt{2} : \sqrt{3}$ となり, $CI = \frac{\sqrt{6}}{3}$ がわかる. 一方同様にして, $GI = \frac{\sqrt{3}}{3}$ がわかるので, $OI = \frac{\sqrt{3}}{6}$ がわかる. したがって, C の座標は, $C\left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \dots$ (答) である. (2) B と H は原点对称なので, H の座標が求めれば十分である. 立方体を z 軸を中心に $-\frac{2\pi}{3}$ だけ回転させると, 問題中の事実により, H は C に移る. この回転は z 座標を変えないので, H の z 座標は $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ である.

次にこの変換で z 軸からの距離は不変であるから, H と z 軸との間の距離は $\frac{\sqrt{6}}{3}$ である. また, HI (I は (1) で定めたものとする) の xy 平面上への正射影を動径と見たときの角度は $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$ である. よって, x 座標は,

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

であり, y 座標は,

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

なので, H の座標は, $H\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ である. これより, B の座標は, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ である.

(3) P は CB を $t : 1 - t$ に内分しているから,

$$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{6}}{6}(1 - 2t), \frac{\sqrt{3}}{6}(2t - 1)\right)$$

がわかる. P' の y 座標は, P の z 軸からの距離に他ならないから,

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 + \left\{\frac{\sqrt{6}}{6}(1 - 2t)\right\}^2} = \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}t^2}$$

がわかる. 一方, P' の z 座標は, P の z 座標に等しいので, 求める座標は,

$$P'\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}(1 - t + t^2)}, \frac{\sqrt{3}}{6}(2t - 1)\right)$$

である.

(4) P' の描く曲線を考える. $y^2 = \frac{1}{3}(t^2 - t + 1) - \frac{1}{4}$ なので, $y^2 = 2z^2 - \frac{1}{4}$ となる. これは双曲線を描く.

(2) の事実より, この立方体は $\frac{2\pi}{3}$ ずつ z 軸の周りに回転させる毎に, C が H に移り, H が F に移る. それに伴い, 原点对称性から, E が B に, B が D に移ることもわかる. よって, これらの点は, z 中心に回転させると同じ軌跡を描くので, 断面を考察する上では, B と C の回転と, AB, GC, BC の回転による軌跡を考えればよい. したがって, 上の P' の描く曲線の考察から, 以下の図 (別ページ参照) を得る.

(1) 接線 ℓ の方程式は, $x \cos \theta + y \sin \theta = 1$ と与えられる. よって, x 軸と ℓ の交点は, $\left(\frac{1}{\cos \theta}, 0\right)$ であり, $x = -1$ と ℓ の交点は, $\left(-1, \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}\right)$ である. よって, 求める面積は,

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos \theta} + 1 \right) \left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{(1 + \cos \theta)^2}{\sin 2\theta}$$

となる.

(2) $S = f(\theta)$ とおく.

$$f'(\theta) = \frac{2(1 + \cos \theta)^2(2 \cos \theta - 1)}{\sin^2 2\theta}$$

であるから, $f'(\theta) = 0$ となるのは, $\cos \theta = -1, 1/2$ のときである. $0 < \theta < \pi/2$ なので, $\theta = \pi/3$ である. このとき増減表は以下 (別ページ参照) の様になる.

よって, S は $\theta = \frac{\pi}{3}$ で最小となり, 最小値は, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ である.

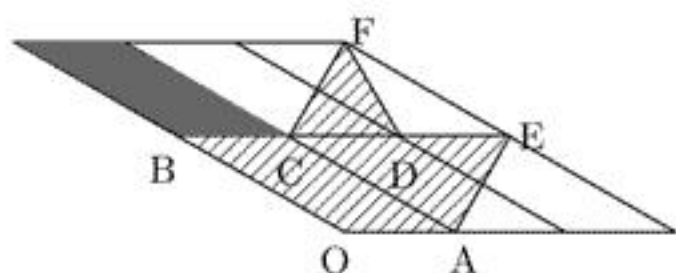


図 1: 3-(2) の図

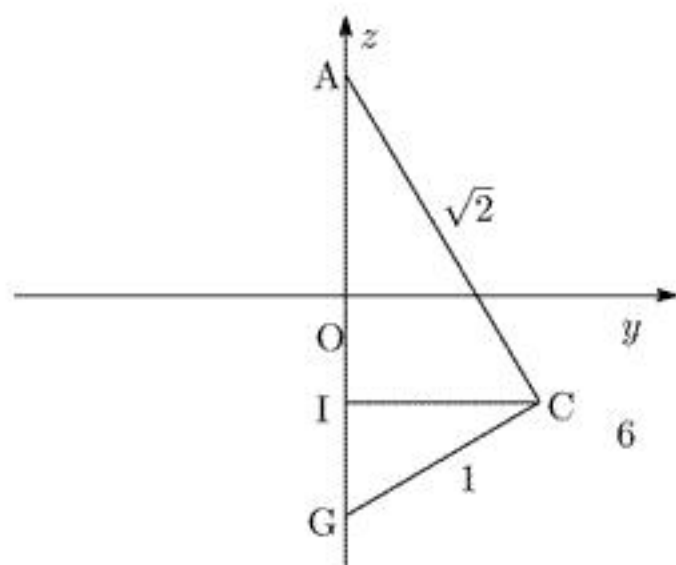


図 2: 4-(1) の図

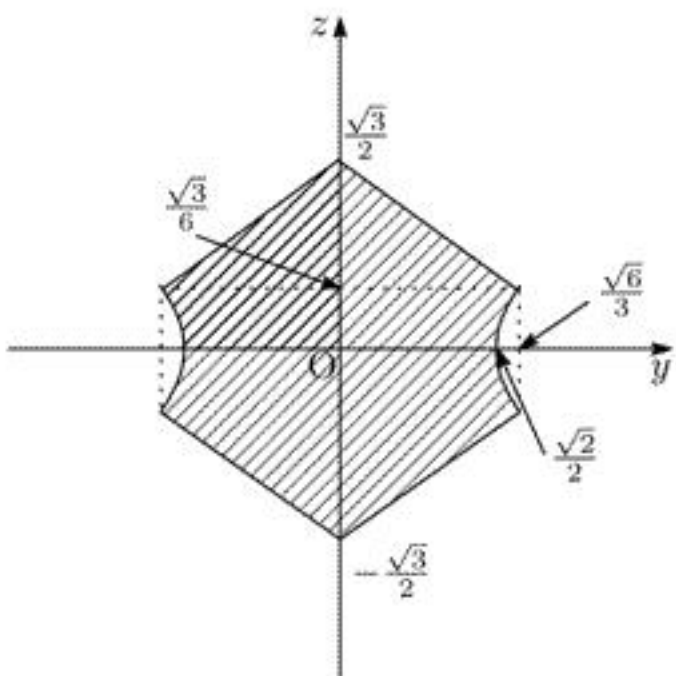


図 3: 4-(4) の図