1

(1) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{3\log_2 5}=x$ とおく。

$3\log_2 5=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x$

$=-2\log_2 x$ より

$5^3=x^{-2}$

$x=5^{-\frac{3}{2}}$

(2) $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$

$=16\cos^2 B+4-16\cos^2 B$

$=4$ より $AC=2$

$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C$

$=8-8\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{3}$ より

$16\cos^2 B=\frac{32}{3}$

$\cos^2 B=\frac{2}{3}$

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$

$4=16\cos^2 B+4-16\cos B\cdot\cos A$

$4=\frac{32}{3}+4-\frac{16\sqrt{6}}{3}\cos A$

$\frac{16\sqrt{6}}{3}\cos A=\frac{32}{3}$

$\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$

(3) $P(x)=(x^2+4)Q(x)+x-3$

$P(x)=(x^2-2x+2)Q_1(x)+x+7$ とおける。

$x^2-2x+2=0$ の解は $1+i,\ 1-i$ だから

$$\begin{cases}P(1+i)=8+i\\ P(1-i)=8-i\end{cases}$$

$$\begin{cases}P(1+i)=\{(1+i)^2+4\}Q(1+i)+1+i-3=8+i\\ P(1-i)=\{(1-i)^2+4\}Q(1-i)+1-i-3=8-i\end{cases}$$

より $$\begin{cases}Q(1+i)=\frac{10}{2i+4}\\ Q(1-i)=\frac{10}{-2i+4}\end{cases}$$

ここで

$Q_1(x)=(x^2-2x+2)Q_2(x)+ax+b$

$$\begin{cases}Q(1+i)=a(1+i)+b=\frac{10}{2i+4}\\ Q(1-i)=a(1-i)+b=\frac{10}{-2i+4}\end{cases}$$ を解いて、

$a=-1,\ b=3$ より

求める余りは $-x+3$

$\boxed{2}$

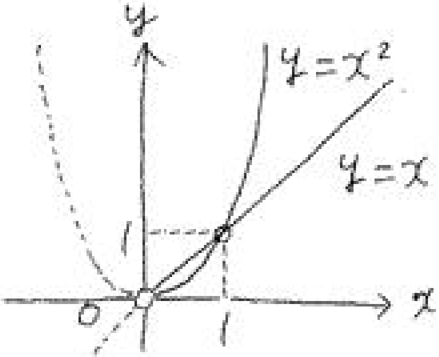
(1) $\log_x y + \log_y x^2 = 3$

$\log_x y + 2 \cdot \dfrac{1}{\log_x y} = 3$

$(\log_x y)^2 - 3\log_x y + 2 = 0$

$(\log_x y - 1)(\log_x y - 2) = 0$ より $\log_x y = 1$ または $\log_x y = 2$

$x = y$ 　　　$x^2 = y$



(2) 図で考える。k の値を変化させる。

$-\dfrac{9}{4} < k < -2$, $-2 < k < 0$

$\boxed{3}$ (1) $\ell_1 : y = -x + p + p^2$

$\ell_2 : y = 2x - 2p + p^2$

q : $x^2 + x - p - p^2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(2p+1)^2}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm (2p+1)}{2} = p, -p-1 \quad より \ q = -p-1$$

r : $x^2 - 2x + 2p - p^2 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4p^2 - 8p + 4}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 2(p-1)}{2} = p, -p+2 \quad より \ r = -p+2$$

(2) $q < p < r$

$-p-1 < p < -p+2$

$-\frac{1}{2} < p < 1$

(3) $S_1 = -\int_{-p-1}^{p} (x-p)\{x-(-p-1)\}dx$

$$= \frac{8p^3 + 12p^2 + 6p + 1}{6}$$

$S_2 = -\int_{p}^{-p+2} (x-p)\{x-(-p+2)\}dx$

$$= \frac{-8p^3 + 24p^2 - 24p + 8}{6}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{36p^2 - 18p + 9}{6}$$

$$= 6p^2 - 3p + \frac{3}{2} = 6\left(p - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

最小値は $p = \frac{1}{4}$ のとき $\frac{9}{8}$