

1

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
1	3	6	4	9	1	3

2

(1)

ク	ケ
3	3

(2)

コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ
5	4	1	2	5	4	1	7	1	8

$$\sin \theta - k \cos \theta = 2(1 - k) \cdots (*)$$

を変形して、

$$\frac{\sin \theta - 2}{\cos \theta - 2} = k$$

を得る。ここで、 $f(\theta) = \frac{\sin \theta - 2}{\cos \theta - 2}$ とおく。

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{1 - 2(\sin \theta + \cos \theta)}{(\cos \theta - 2)^2} \\ &= \frac{1}{(\cos \theta - 2)^2} \left\{ 1 - 2\sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで、 α を、 $\sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ かつ $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{4}$ となるようにとる。このような α は必ずとれて、ただ一つである。なぜならば、 $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ となるため、 $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{4}$ では条件を満たすものは存在しないからである。

以上をふまえると、増減表は以下のようになる。

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\alpha - \frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

また、 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ であり、 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}$ である。また、

$$\begin{aligned} f\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - 2}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - 2} \\ &= \frac{4 + \sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

となるので、グラフは右のようになる。このグラフから、 $(*)$ が解を持つような k の範囲は、 $\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{4 + \sqrt{7}}{3}$ である。

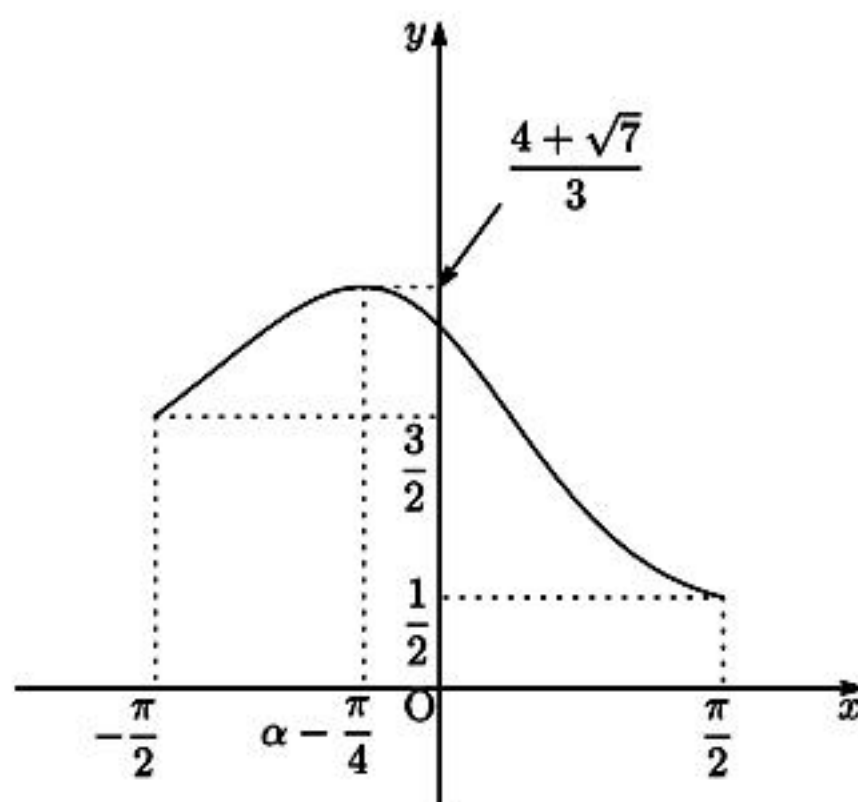


図1 3のグラフ

(1)P の x 座標を t ($t > 0$) とおく。直線 ℓ の傾きは $-a$ であり、直線 ℓ' の傾きは $3t^2 - a$ であるから、(b) の条件より、

$$\begin{aligned} -a(3t^2 - a) &= -1 \\ t^2 &= \frac{1}{3} \left(a + \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

$t > 0$ より

$$t = \sqrt{\frac{1}{3} \left(a + \frac{1}{a} \right)}$$

(2) ℓ と ℓ' の方程式はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \ell : y &= -ax \\ \ell' : y &= (3t^2 - a)x - 2t^3 \end{aligned}$$

となる。これらを連立して x と y について解くと、Q の座標は $\left(\frac{2}{3}t, -\frac{2}{3}at \right)$ となる。

従って、OQ と PQ の長さは、

$$\begin{aligned} OQ &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}t \right)^2 + \left(-\frac{2}{3}at \right)^2} \\ &= \frac{2}{3}t\sqrt{1+a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{\left(t - \frac{2}{3}t \right)^2 + \left(t^3 - \frac{1}{3}at \right)^2} \\ &= \frac{1}{3}t\sqrt{1+(3t^2-a)^2} \\ &= \frac{1}{3}t\sqrt{1+\frac{1}{a^2}} \\ &= \frac{t}{3a}\sqrt{1+a^2} \end{aligned}$$

なので、求める面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ = \frac{1+a^2}{9a} \cdot t^2 = \frac{1}{27} \left(a + \frac{1}{a} \right)^2$$

である。

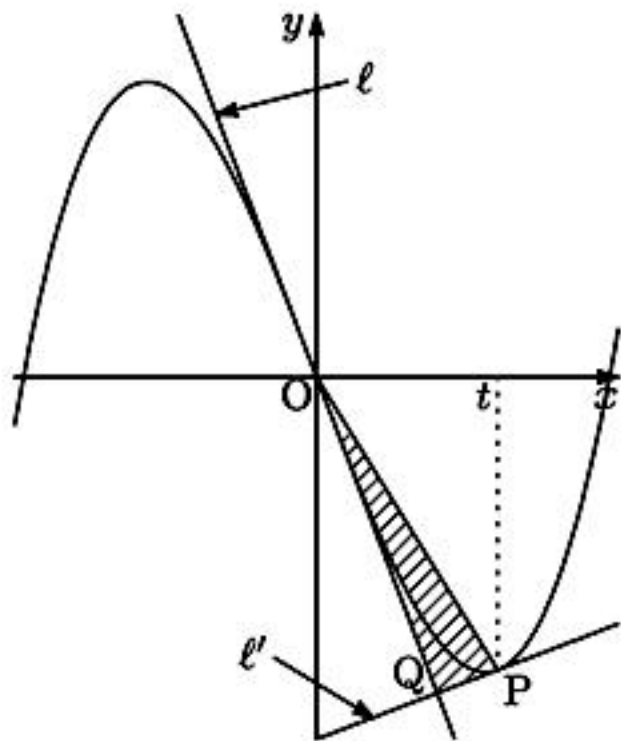


図 2 4 の図

(1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ では、R は Q から CP におろした垂線の足となる。よって、 $CP = a$ かつ $CR = a \cos \theta$ なので、

$$\overrightarrow{CR} = \cos \theta \cdot \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} -a \cos \theta \sin \theta \\ -a \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

である。また、 $OQ = a\theta$ であるから、

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} a\theta \\ a \end{pmatrix}$$

である。従って、

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CR} = \begin{pmatrix} a(\theta - \sin \theta \cos \theta) \\ a \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

となるので、R の座標は $(a(\theta - \sin \theta \cos \theta), a \sin^2 \theta)$ である。

(2) $x = a(\theta - \sin \theta \cos \theta)$ 、 $y = a \sin^2 \theta$ とおく。このとき

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos 2\theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = a \sin 2\theta$$

であり、 $0 \leq 2\theta \leq \pi$ なので、

$$\frac{dx}{d\theta} \geq 0, \quad \frac{dy}{d\theta} \geq 0$$

である。すなわち、R の描く軌跡は、 x についての増加関数であることがわかる。よって、概形は図のようになるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}a} y dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^2 \theta \cdot a(1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta)(1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\frac{3}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{8}a^2 \end{aligned}$$

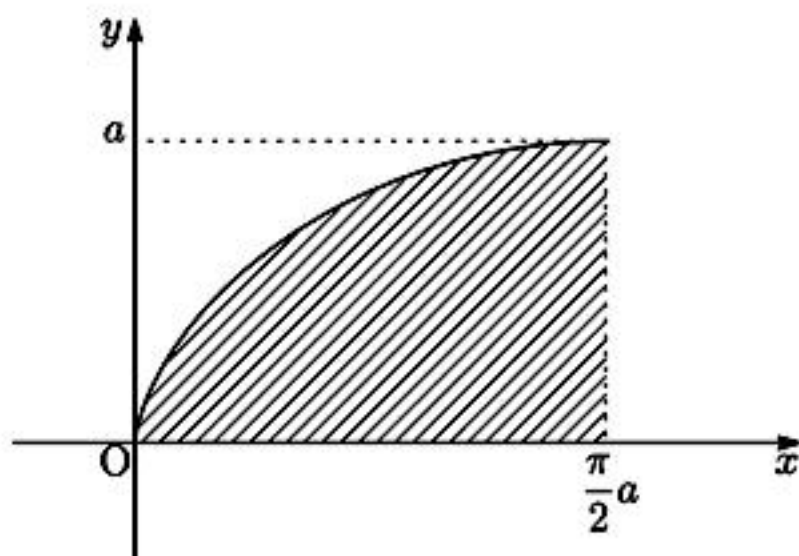


図3 5のRの軌跡