

1

番号	ア	イ	ウ	エ	オ
答	3	1	2	3	0

2

番号	力	キ	7	7	3
答	1	4	3	9	2

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f_2(x) &= f_1(f_1(x)) \\
 &= \frac{b \cdot \frac{bx}{x+a}}{\frac{bx}{x+a} + a} \\
 &= \frac{b^2 x}{(a+b)x + a^2} \quad \dots\dots (答)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_3(x) &= f_2(f_2(x)) \\
 &= \frac{b \cdot \frac{b^2 x}{(a+b)x + a^2}}{\frac{b^2 x}{(a+b)x + a^2} + a} \\
 &= \frac{b^3 x}{(a^2 + ab + b^2)x + a^3} \quad \dots\dots (答)
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad f_n(x) = \frac{b^n x}{\left(\sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1}\right)x + a^n} \quad (n \geq 1) \dots (*)$$

と推測される。(*) が成立することと、
 n についての数学的帰納法を用いて
 証明する。

(I) $n = 1$ の時

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \frac{bx}{x+a} \\
 &= \frac{b^1 x}{\left(\sum_{k=1}^1 a^{1-k} b^{k-1}\right)x + a^1}
 \end{aligned}$$

よって、(*) は、確かに成立している。

(II) $n = l$ の時

$$f_l(x) = \frac{b^l x}{\left(\sum_{k=1}^l a^{l-k} b^{k-1}\right)x + a^l}$$

が成立すると仮定する。

(III) $n = l+1$ の時

$$\begin{aligned}
 f_{l+1}(x) &= f_l(f_l(x)) \\
 &= \frac{b \cdot \frac{b^l x}{\left(\sum_{k=1}^l a^{l-k} b^{k-1}\right)x + a^l}}{\frac{b^l x}{\left(\sum_{k=1}^l a^{l-k} b^{k-1}\right)x + a^l} + a} \\
 &= \frac{b^{l+1} x}{b^l x + a \left(\sum_{k=1}^l a^{l-k} b^{k-1}\right) + a^{l+1}} \\
 &= \frac{b^{l+1} x}{\left\{\left(\sum_{k=1}^l a^{l+1-k} b^{k-1}\right) + b^l\right\}x + a^{l+1}} \\
 &= \frac{b^{l+1} x}{\left(\sum_{k=1}^{l+1} a^{l+1-k} b^{k-1}\right)x + a^{l+1}}
 \end{aligned}$$

これは、 $n = l+1$ の時も、(*) が成立
 することと示している。

したがって、任意の自然数 n について
 (*) の成立が、数学的帰納法の原理
 により証明された。 //

$$(3) \quad f_n(b) = \frac{b^n \cdot b}{\left(\sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1}\right)b + a^n} \quad \therefore (2)$$

$$= \frac{b^{n+1}}{\left(\sum_{k=1}^n a^{n-k} b^k\right) + a^n}$$

$$= \frac{b}{\left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k}\right) + \frac{a^n}{b^n}} \quad \because b > 0$$

$$= \frac{b}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{a}{b}\right)^{k-1}}$$

$$= \frac{b}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{b - a}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(b) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - a}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}} \\
 &= \underline{b - a} \quad \because 0 < \frac{a}{b} < 1
 \end{aligned}$$

..... (答)

$$(1) \begin{cases} x = \cos \theta + \sin \theta \\ y = \cos \theta \sin \theta \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos \theta + \sin \theta \\ y = \cos \theta \sin \theta \\ (\cos \theta + \sin \theta)^2 - 2 \cos \theta \sin \theta = 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ x^2 - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

↓. 7. 求める軌跡は

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \quad (-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}) \quad \dots (答)$$

これを図示すると下記のようになる。

$$\begin{aligned} (2) \quad f(\theta) &= 4(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) - 9 \cos \theta \sin \theta \\ &= 4\{(\cos \theta + \sin \theta)^3 - 3 \cos \theta \sin \theta (\cos \theta + \sin \theta)\} \\ &\quad - 9 \cos \theta \sin \theta \\ &= 4(x^3 - 3yx) - 9y \\ &= 4x^3 - (12x + 9) \cdot \frac{x^2 - 1}{2} \quad \because (1) \\ &= -2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + \frac{9}{2} \quad \dots (答) \end{aligned}$$

$$(3) \quad F(x) = -2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + \frac{9}{2} \quad (-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2})$$

とある。F(x)の増減を以下で調べる

$$F'(x) = -6x^2 - 9x + 6$$

↓. 7.

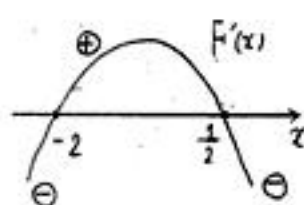
$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 - 9x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ 或 } \frac{1}{2}$$

↓. 7. F(x)の増減表は次の通りとなる。

x	$-\sqrt{2}$	...	$\frac{1}{2}$	...	$\sqrt{2}$
F'(x)	+	+	0	-	-
F(x)	$-2\sqrt{2} - \frac{9}{2}$	↗	$\frac{49}{8}$	↘	$2\sqrt{2} - \frac{9}{2}$

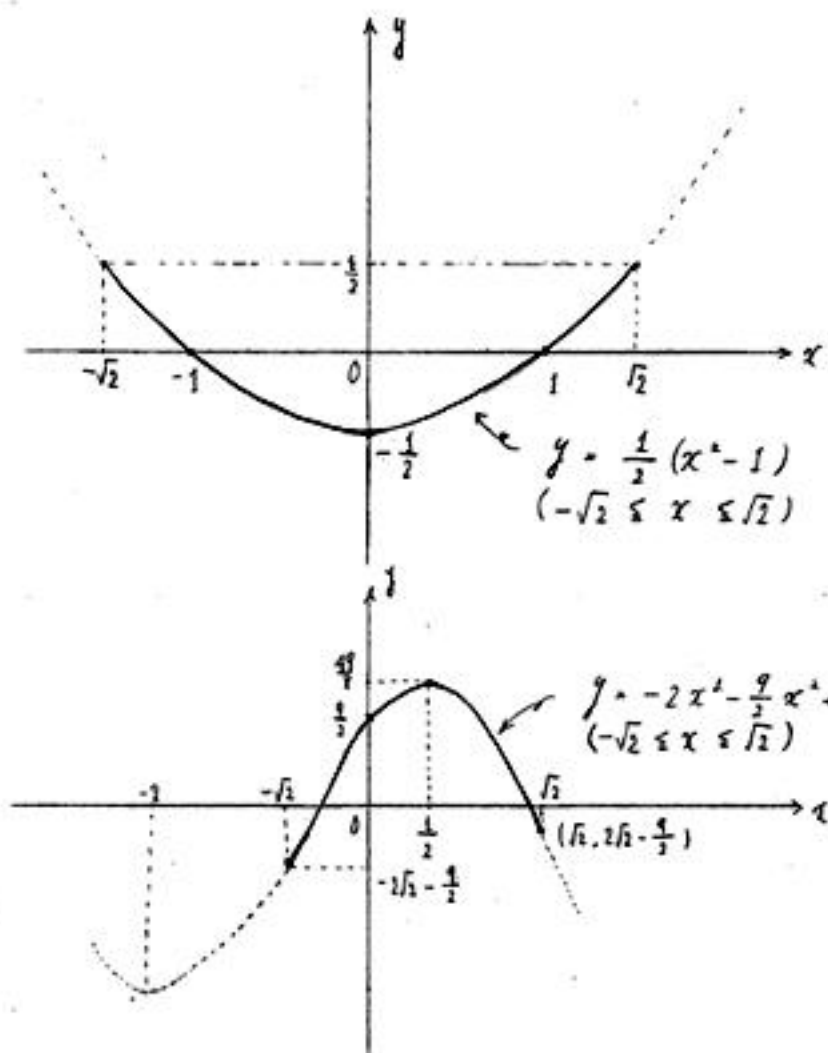
極大



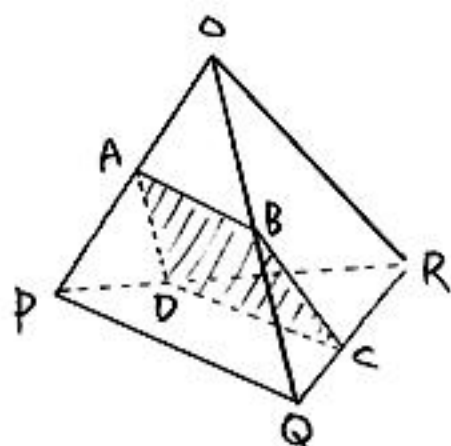
↓. 7.

$$f(\theta) \text{ の最大値 : } \frac{49}{8}$$

$$f(\theta) \text{ の最小値 : } -2\sqrt{2} - \frac{9}{2} \quad \dots (答)$$



- (1) O, R の座標は $(0, 0, 0)$ と $(2a, 0, 0)$
 P, Q の座標は $(0, 1, 1)$ と $(a, 1, 1)$
 四面体 $OPQR$ と平面 $z=1$ は
 右図のように 4 辺 OP, OQ, QR, PR
 と交わる。この交点を A, B, C, D とする。

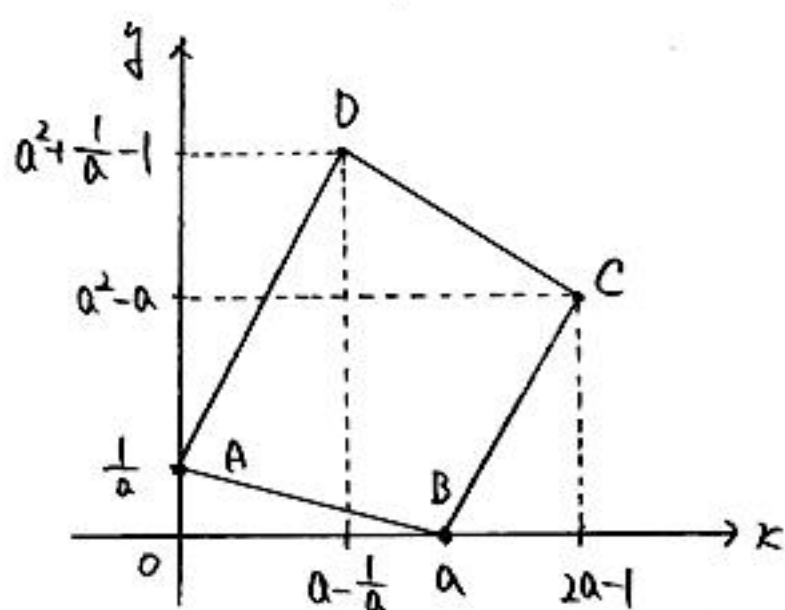


$$\begin{aligned}\vec{OA} &= k\vec{OP} \\ &= (0, ka, ka^2) \\ \text{であり、} z=1 \text{ より } ka^2 &= 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{a^2} \quad \text{より } z=1\end{aligned}$$

$$A(0, \frac{1}{a}, 1)$$

$$\text{同様に、} B(a, 0, 1), C(2a-1, a^2-a, 1), \\ D(a-\frac{1}{a}, a^2+\frac{1}{a}-1, 1) \text{ と得る。}$$

よって図示した、 F の概形は以下のように得る。



- (2) $z=1$ 平面において
 $\vec{AB} = (a, -\frac{1}{a}), \vec{AD} = (a-\frac{1}{a}, a^2-1)$ かつ

$$\begin{aligned}\Delta ABD &= \frac{1}{2} \left| a^3 - a + 1 - \frac{1}{a^2} \right| \\ &= \frac{1}{2} (a^2-1) \left(a + \frac{1}{a^2} \right) \\ &= \frac{1}{2a^2} (a^2-1)(a^3+1) \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\text{また、} \vec{DB} = (\frac{1}{a}, -a^2-\frac{1}{a}+1), \vec{DC} = (a+\frac{1}{a}-1, -a-\frac{1}{a}+1) \text{ かつ}$$

$$\begin{aligned}\Delta DBC &= \frac{1}{2} \times \left| a + \frac{1}{a} - 1 \right| \times \left| -\frac{1}{a} + a^2 + \frac{1}{a} - 1 \right| \\ &= \frac{1}{2} (a + \frac{1}{a} - 1)(a^2-1) \\ &= \frac{1}{2a^2} (a^2-1)(a^3-a^2+a) \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

①, ② かつ F の面積は

$$\begin{aligned}\Delta ABD + \Delta DBC &= \frac{1}{2a^2} (a^2-1)(2a^3-a^2+a+1) \\ &= \frac{1}{2a^2} (a+1)(a-1)(2a+1)(a^2-a+1)\end{aligned}$$