1

（答）　$$\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},\ \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)$$

[2]

中心座標を, 実数 a, b を用いて (a, b) とする.

このとき, 直線と単位円にこの円が接することから,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 & \cdots ① \\ \dfrac{|a + \sqrt{3} - 4|}{\sqrt{4}} = 1 & \cdots ② \end{cases}$$

②より, $a + \sqrt{3}b = 6$, もしくは $a + \sqrt{3} = 2$.

ア)　$a + \sqrt{3}b = 6$ のとき

$a = 6 - \sqrt{3}b$ を①に代入して,

$$\begin{aligned} \left(6 - \sqrt{3}b\right)^2 + b^2 - 4 &= 0 \\ 4b^2 - 12\sqrt{3}b + 32 &= 0 \\ b^2 - 3\sqrt{3}b + 8 &= 0 \end{aligned}$$

この式の判別式を D とおくと,

$D = 27 - 32 < 0$ より,

この方程式は実数解を持たないので不適.

イ)　$a + \sqrt{3}b = 2$ のとき

$a = 2 - \sqrt{3}b$ を①に代入して,

$$\begin{aligned} \left(2 - \sqrt{3}b\right)^2 + b^2 - 4 &= 0 \\ b^2 - \sqrt{3}b &= \\ b &= 0,\ \sqrt{3} \end{aligned}$$

$b = 0$ のとき, $a = 2$

$b = \sqrt{3}$ のとき, $a = -1$

これらはともに条件を満たす.

よって, (答)　$(2, 0)$, $\left(-1, \sqrt{3}\right)$

[3]

(1)

$$F(t)=\int_0^1 x^2 f(x)\,dx-2t\int_0^1 xf(x)\,dx+t^2\int_0^1 f(x)\,dx\cdots①$$

$\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,dx=\beta$とおくと,

$$\begin{aligned} ①\leftrightarrow F(t) &= \beta-2t\alpha+t^2\\ &= (t-\alpha)^2-\alpha^2+\beta \end{aligned}$$

よって,$F(t)$は下に凸の2次関数だから,最小値は頂点のとき.

(答)　$t=\alpha$

(2)

(1)より $-\alpha^2+\beta=\dfrac{1}{18}\cdots②$

$f(x)=ax+b$とすると,$(a\neq 0)$

$$\begin{aligned} \beta &= \int_0^1 x^2(ax+b)\,dx\\ &= \int_0^1 ax^3+bx^2dx\\ &= \left[\frac{1}{4}ax^4+\frac{1}{3}bx^2\right]_0^1\\ &= \frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b\cdots③ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^1 x(ax+b)\,dx\\ &= \int_0^1 ax^2+bxdx\\ &= \left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2\right]_0^1\\ &= \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\cdots④ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 (ax+b)\,dx\\ &= \left[\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}a+b\cdots⑤ \end{aligned}$$

③,④,⑤を連立して,

$(a,b,\alpha,\beta)=\left(2,0,\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{2}\right),\left(-2,2,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6}\right)$

よって(答)　$\alpha=\dfrac{2}{3},\ f(x)=2x$　または$\alpha=\dfrac{1}{3},\ f(x)=-2x+2$